



# Dualité de Schur-Weyl, mouvement brownien sur les groupes de Lie compacts classiques et étude asymptotique de la mesure de Yang-Mills

Antoine Dahlqvist

## ► To cite this version:

Antoine Dahlqvist. Dualité de Schur-Weyl, mouvement brownien sur les groupes de Lie compacts classiques et étude asymptotique de la mesure de Yang-Mills. Mathématiques générales [math.GM]. Université Pierre et Marie Curie - Paris VI, 2014. Français. NNT : 2014PA066012 . tel-00961035v3

**HAL Id: tel-00961035**

**<https://theses.hal.science/tel-00961035v3>**

Submitted on 11 Jan 2016

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Laboratoire de Probabilités  
et Modèles Aléatoires



Université Pierre  
et Marie Curie

**École Doctorale de Sciences Mathématiques de Paris Centre**

# THÈSE DE DOCTORAT

Discipline : Mathématiques

présentée par

**Antoine DAHLQVIST**

---

**Dualité de Schur-Weyl, mouvement brownien sur les  
groupes de Lie compacts classiques et étude  
asymptotique de la mesure de Yang-Mills**

---

dirigée par Thierry LÉVY

Soutenue le 12 février 2014 devant le jury composé de :

M. Florent BENAYCH-GEORGES	Université Paris Descartes
M. Philippe BIANE	CNRS, Université Paris-Est
M. Philippe BOUGEROL	Université Paris VI
M <sup>me</sup> Catherine DONATI-MARTIN	UVSQ
M. Thierry LÉVY	Université Paris VI
M <sup>me</sup> Mylène MAÏDA	Université de Lille 1

Laboratoire de Probabilités et  
de Modèles Aléatoires  
Case courrier 188  
4, Place Jussieu  
75252 Paris cedex 05

École doctorale de Sciences Mathéma-  
tiques de Paris Centre  
Case courrier 188  
4, place Jussieu  
75 252 Paris cedex 05

# Résumé

On s'intéresse dans cette thèse à l'étude de variables aléatoires sur les groupes de Lie compacts classiques. On donne une déformation du calcul de Weingarten tel qu'il a été introduit par B. Collins et P. Śniady. On fait une étude asymptotique du mouvement brownien sur les groupes de Lie compacts de grande dimension en obtenant des nouveaux résultats de fluctuations. Deux nouveaux objets, que l'on appelle champ maître gaussien planaire et champ maître orienté planaire, sont introduits pour décrire le comportement asymptotique des mesures de Yang-Mills pour des groupes de structure de grande dimension.



# Remerciements

Je remercie d'abord Thierry pour avoir encadré mes recherches quatre ans durant. J'aurai énormément appris sous son influence, avant tout une façon de travailler communicative d'enthousiasme, un goût pour regarder un même objet sous toutes ses facettes.

Je tiens à remercier Benoît Collins et Mylène Maïda pour avoir accepté d'être rapporteurs de cette thèse. Je remercie Mylène pour sa présence à la soutenance.

Je suis très honoré de voir Florent Benaych, Philippe Biane, Philippe Bougerol et Catherine Donati-Martin parmi les membres du jury, je les remercie vivement de leur participation.

Je suis grandement reconnaissant envers Benoît pour m'avoir invité à Sendai, ce fut un grand plaisir de travailler au AIMR, sur des questions si proches de mes centres d'intérêt mathématiques. Merci à Camille Male pour m'avoir accueilli dans la ville et avoir partagé ses opinions et ses trafics. Je garde d'excellents souvenirs de ces discussions dans notre boîte blanche, au château Kawauchi ou encore dans les rues de Kokubuncho.

La thèse qui suit n'aurait jamais vu le jour sans mes deux frères de thèse Franck Gabriel et Guillaume Cébron. Merci à vous deux.

Merci également à Cédric Boutillier pour ces nombreuses discussions et pour m'avoir soutenu lors de mes candidatures. Je remercie aussi Florent Benaych pour plusieurs discussions instructives dans le couloir du LPMA.

I thanks David Brydges and Gordon Slade for introducing me to research.

J'ai eu le plaisir d'encadrer les TDs des cours d'Omer Adelman et Amaury Lambert ; je garderai un très bon souvenir de ces trois ans d'intégration et du sens de l'humour sagace d'Omer.

Pendant mes trois années à Jussieu, j'aurai vu un bureau, le 203, se former peu à peu, passer de l'état d'amas de tables sans chaises à celui d'un lieu de vie incontournable du LPMA, maintenant formé d'un joyeux équipage - Xan, Alexandre, Franck, Florian, Boum - et d'un ficus. Il faut aussi noter les passages de Bruno, Clara et Benjamina. Ce fut un plaisir de partager votre quotidien.

Je remercie aussi Damien Simon pour ces échanges sur les groupes quantiques de l'autre côté du tableau noir du 203.

Je n'oublierai pas la fantastique équipe de thésards du LPMA : Clément&Karim, Bastien,

Cyril, Reda, Pablo, Nelo, Xinxin, Minmin, Pascal, Julien, Cécile, Max, Vincent, Yvain, Loïc, Pierre-Antoine, Eric, Raoul, Mathieu, Noufel sans oublier Nikos !

Je voudrais exprimer ma reconnaissance envers Florence Deschamps, Maria Pochot et Philippe Macé pour leur souplesse et leur tolérance quant aux différents retards que j'ai pu leur infliger, envers Jacques Portès pour son efficacité et ses conseils en matière de littérature scandinave.

Je remercie Romain Allez pour ces parties de tennis souvent agrémentées de matrices aléatoires. Je remercie un autre ami mathématicien, Adrien Kassel, pour ces nombreuses discussions à l'ENS, à Buzios, à Jussieu ou ailleurs sur des questions de mécanique statistiques et de mesure de Yang-Mills. Mes pensées vont à mes amis, à ceux du COGE, qui ont redonné de la couleur à ma dernière année de thèse, à ceux qui, 7 ans durant, se sont retrouvés certains lundi sur la même piste.

Une personne à qui l'aboutissement du présent mémoire tient beaucoup est ma mère ; je la remercie pour son soutien.

## Présentation des travaux et orientation

*On donne ici une introduction courte de notre travail de thèse pour en présenter les principaux résultats et pour les localiser dans le texte qui suit.*

Le cadre des travaux que l'on va présenter dans ce texte est celui des probabilités sur des groupes de symétries. Une question qui les motive est de comprendre comment les propriétés d'invariance de variables aléatoires en simplifient l'étude. Nous nous sommes spécifiquement intéressés aux groupes de symétries continues appartenant aux séries de groupes classiques. Le texte s'articule autour de l'étude de deux objets probabilistes : le mouvement brownien sur un groupe de Lie compact et la mesure de Yang-Mills euclidienne. Ces deux objets sont complémentaires, on peut définir et étudier l'un à partir de l'autre. Le deuxième peut être vu comme un modèle de géométrie aléatoire sur le plan, à savoir une connexion aléatoire sur le fibré au dessus du plan, dont les fibres sont paramétrées par le groupe de symétrie. Un autre point de vue est aussi de considérer cet objet aléatoire comme un processus indexé par les lacets du plan. Il apparaît alors comme une généralisation naturelle du mouvement brownien, adaptée à l'aspect potentiellement non-commutatif du groupe de symétrie. On donne dans la première partie une présentation des ces deux objets en exposant les résultats que nous avons obtenus. Ceux-ci sont développés dans les chapitres 2 à 4.

Le deuxième chapitre aborde la question de l'intégration des polynômes sur les groupes classiques. Dans cette situation, la propriété d'invariance par conjugaison d'une variable aléatoire simplifie drastiquement le calcul. L'outil qui permet de montrer qu'une telle simplification a lieu est la dualité de Schur-Weyl. C'est en la prenant en compte que B. Collins et P. Śniady ont développé dans [14] une façon d'intégrer tout polynôme contre la mesure de Haar sur tous les groupes classiques. Ils simplifièrent et généralisèrent ainsi le travail [10], qui fut initié par les calculs [55] du physicien D. Weingarten. Dans le chapitre 2, on s'intéresse au même problème quand la variable aléatoire considérée n'est plus distribuée suivant la mesure de Haar mais égale en loi à la marginale unidimensionnelle d'un mouvement brownien. Notre énoncé principal est le théorème 1.1.18, résultat qui, comme il est expliqué dans la section 1.1.4, permet de retrouver indépendamment celui de B. Collins et P.Śniady avec le calcul stochastique pour seul outil.

Une propriété remarquable des expressions obtenues de ces deux façons est qu'elles se prêtent bien à une étude asymptotique, lorsque l'on considère la suite des groupes d'une même série. Elles déterminent le comportement d'une famille d'observables décrite par la dualité de Schur-Weyl, qui ne dépend pas de la dimension des groupes mais seulement du type de série considérée. C'est en développant cette observation que l'on étudie dans les chapitres 3 et 4 le mouvement brownien et la mesure de Yang-Mills pour des groupes de Lie de grande dimension.

Une première quantité qui peut être décrite par ces observables est la mesure empirique des valeurs propres d'un mouvement brownien. Il était connu de [5, 56, 35] que celle-ci converge en un sens faible vers une mesure déterministe sur le cercle unité qui ne dépend pas de la série



considérée. Le théorème 1.3.7 établit que les fluctuations autour de cette mesure déterministe sont de nature gaussienne et dépendent du type de série considérée. Il apparaît que le champ gaussien décrivant ces fluctuations pour la série des groupes unitaires permet de décrire naturellement les fluctuations pour les autres types de séries de groupes de Lie compact. Ces champs gaussiens apparaissent également comme une déformation de ceux qui décrivent les fluctuations de la mesure empirique de grandes matrices distribuées suivant la mesure de Haar telles qu'elles ont été décrites par [19]. On retrouve et on généralise par ce théorème un résultat de T. Lévy et M. Maïda [36], qui étudie ces mêmes fluctuations pour la série des groupes unitaires. Notre approche est indépendante de celle de [36] et démontre la convergence d'une famille de cumulants. On montre que la suite des mouvements browniens sur les groupes d'une série compacte classique converge à tout ordre. C'est l'objet du théorème 1.3.8.

Cette approche admet deux avantages. D'une part, elle s'adapte simplement pour montrer des fluctuations d'une autre échelle. On s'est inspiré ici du papier [11], qui démontre qu'un tel comportement a lieu dans un cadre général, pour des matrices aléatoires de loi invariante par conjugaison. Le corollaire 1.3.10 montre que les coefficients de ces grandes matrices de mouvements browniens, ou de leurs puissances, se comportent comme des gaussiennes de variance  $\frac{1}{N}$ . Ce résultat étend à d'autres familles de variables aléatoires et à des groupes de différentes séries un théorème de F. Benaych [4] concernant les coefficients de matrices unitaires. Ici aussi, de telles fluctuations avaient été démontrées dans [15]. D'autre part, elle permet de mener une étude asymptotique de la mesure de Yang-Mills.

Dans le texte [35], T. Lévy montre que la mesure de Yang-Mills se concentre asymptotiquement sur un objet déterministe appelé champ maître planaire. On résout dans cette thèse le problème des fluctuations autour de cette limite. Une difficulté de cette étude venait de la complexité des fluctuations de la mesure empirique d'un seul brownien, telles qu'elles étaient décrites dans [36]. La nouvelle preuve qu'on en donne, généralise l'approche de [34] à l'étude des cumulants de fonctions traces de puissances, évaluées en des mouvements browniens sur des groupes de Lie.

Le théorème 1.3.24 montre l'existence d'un champ gaussien complexe centré indexé par les lacets de longueur finie du plan, qui décrit les fluctuations du champ d'holonomie de Yang-Mills autour du champ maître. On appelle le champ obtenu pour la série unitaire, champ maître gaussien planaire. Les fluctuations de la mesure de Yang-Mills pour les séries orthogonales ou symplectiques sont décrites par la partie réelle de ce champ complexe ainsi que par une fonction de moyenne  $\mathbf{m}$  non triviale.

Pour montrer ce résultat, on définit un autre objet limite, qui généralise la limite à tout ordre d'un seul mouvement brownien. Pour la série unitaire, c'est une fonction sur les ensembles finis de lacets rectifiables que l'on appelle champ maître orienté. L'analogue de cet objet pour les séries orthogonales et symplectiques est une seule et même fonction, qui ne dépend pas de l'orientation des lacets et s'exprime naturellement en termes du champ maître orienté.

Un fait remarquable et observé par les physiciens Makeenko et Migdal est que le champ maître planaire satisfait des relations différentielles quand on fait varier un lacet d'une certaine manière

au voisinage d'un point d'intersection. Ces relations portent maintenant le nom d'équation de Makeenko-Midgal et ont été démontrées rigoureusement par T. Lévy dans [35]. Les théorèmes 3.4.3 et 4.2.9 révèlent que ces relations admettent des analogues pour le champ maître orienté et pour la fonction moyenne  $\mathbf{m}$ . On montre en outre dans le théorème 3.4.13 que ces équations permettent de caractériser toutes les fonctions décrivant la convergence à tout ordre de la mesure de Yang-Mills.

L'étude des fluctuations de la mesure de Yang-Mills est décrite en deux temps : dans le chapitre 3, où l'on s'intéresse au champ maître gaussien et au champ maître orienté, puis, dans le chapitre 4, où l'on considère le comportement asymptotique de la mesure de Yang-Mills pour les séries de groupes compacts orthogonaux et symplectiques.



# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>13</b>
1.1	Mouvement brownien sur les groupes de Lie compacts classiques . . . . .	13
1.1.1	Définitions . . . . .	13
1.1.2	Fonctions invariantes par conjugaison, théorème de Peter-Weyl . . . . .	17
1.1.3	Dualité de Schur-Weyl . . . . .	20
1.1.4	Formules d'intégration sur les groupes classiques . . . . .	22
1.2	Mesure de Yang-Mills planaire . . . . .	24
1.2.1	Connexion sur un fibré trivial et mesure de Yang-Mills planaire . . . . .	25
1.2.2	Mesure de Yang-Mills discrète . . . . .	26
1.2.3	Groupe des lacets réduits . . . . .	27
1.2.4	Lassos, invariance par tressage . . . . .	27
1.2.5	Mesure de Yang-Mills continue, limites projectives . . . . .	29
1.2.6	Construction infinitésimale d'une mesure de Yang-Mills par calcul stochastique . . . . .	29
1.2.7	Tribu invariante et spin networks . . . . .	32
1.2.8	L'exemple du groupe de structure $U(1)$ . . . . .	35
1.3	Comportement asymptotique quand la dimension des groupes tend vers l'infini . . . . .	35
1.3.1	Comportement des valeurs propres, concentration de la mesure empirique . . . . .	36
1.3.2	Résultats de fluctuation . . . . .	40
1.3.3	Probabilités non-commutatives . . . . .	42
1.3.4	Champ maître, champs maîtres gaussiens, champs maîtres à tout ordre . . . . .	44
<b>2</b>	<b>Integration formulas for Brownian motion on classical compact Lie groups</b>	<b>49</b>
2.1	Introduction . . . . .	49
2.2	Brownian motion on classical compact Lie groups . . . . .	50
2.3	Integration formulas for the Haar measure . . . . .	51
2.4	Reformulation in the Brauer algebra. . . . .	54
2.4.1	Brauer algebra . . . . .	54
2.4.2	Expectation of tensors as elements of the Brauer algebra. . . . .	56
2.4.3	Statement of the Theorem for orthogonal and symplectic matrices . . . . .	57
2.4.4	Walled Brauer algebra . . . . .	59
2.4.5	Statement of the Theorem for unitary matrices . . . . .	60
2.4.6	Limit as time goes to infinity . . . . .	60
2.5	Expectation of tensors with respect to Brownian motion's law . . . . .	67
2.5.1	The Casimir element and its representations . . . . .	67

2.5.2	A decomposition of the Brauer algebra . . . . .	69
<b>3</b>	<b>Gaussian Master Field on the plane</b>	<b>73</b>
3.1	Unitary Brownian motion and its large $N$ limits . . . . .	73
3.1.1	Definition and time scale of unitary Brownian motion . . . . .	73
3.1.2	All orders limit distribution of the unitary Brownian motion . . . . .	75
3.2	Words in free Brownian motions . . . . .	86
3.3	Yang-Mills measure and higher order master field on the plane . . . . .	90
3.3.1	Multiplicative functions . . . . .	90
3.3.2	Definition of the discrete Yang-Mills measure . . . . .	91
3.3.3	Continuous Yang-Mills measure . . . . .	92
3.3.4	Reduced based loops, basis of lassos . . . . .	93
3.3.5	$U(1)$ -Yang-Mills measure . . . . .	96
3.3.6	Master field of higher order . . . . .	96
3.3.7	Master fields of small loops . . . . .	97
3.4	Computation of the master field . . . . .	99
3.4.1	Makeenko-Migdal equation . . . . .	99
3.4.2	Generalized Kazakov basis . . . . .	105
3.4.3	Complexity of skeins . . . . .	110
<b>4</b>	<b>Fluctuations macroscopiques et microscopiques, champs maîtres non orientés d'ordre supérieur</b>	<b>115</b>
4.1	Un théorème central limite pour les mouvements browniens orthogonaux et symplectiques . . . . .	115
4.2	Champs maîtres d'ordre supérieur non orientés . . . . .	125
4.2.1	Mots finis en des mouvements browniens . . . . .	126
4.2.2	Champ maître non orienté d'ordre supérieur . . . . .	130
4.3	Fluctuations microscopiques . . . . .	133
	<b>Bibliographie</b>	<b>137</b>

# Chapitre 1

## Introduction

### 1.1 Mouvement brownien sur les groupes de Lie compacts classiques

#### 1.1.1 Définitions

Introduisons ici le premier objet jouant un rôle central dans ce mémoire, à savoir le mouvement brownien sur un groupe de Lie compact. Considérons tout d'abord un groupe de Lie de dimension finie  $G$ , d'identité  $\text{Id}$  et d'algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$ . On peut pour gagner en simplicité, en perdant un peu en généralité, considérer un sous-groupe fermé du groupe linéaire  $\text{GL}_N(\mathbb{C})$ . Une première manière de définir un mouvement brownien sur  $G$  consiste à généraliser les propriétés caractéristiques d'un mouvement brownien standard : indépendance et stationnarité des accroissements, et continuité des trajectoires.

**Définition 1.1.1.** *Un mouvement brownien à droite sur  $G$  est un processus de Markov  $(Z_t)_{t \geq 0}$ , à valeurs dans  $G$ , vérifiant les conditions suivantes :*

1. *Pour toute suite ordonnée de réels  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{n+1}$ , les variables aléatoires  $(Z_{t_i}^{-1} Z_{t_{i+1}})_{0 \leq i \leq n}$  sont indépendantes et  $Z_{t_1}^{-1} Z_{t_2}$  a même loi que  $Z_{t_2 - t_1}$ .*
2. *Presque sûrement, la fonction  $t \in \mathbb{R}_+ \mapsto Z_t \in G$  est continue.*

Le générateur d'un tel processus peut être décrit comme suit. Pour tout entier  $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ , notons  $C_c^k(G)$  l'espace vectoriel des fonctions à support compact, de classe  $C^k$  sur la variété  $G$ . À chaque élément  $X \in \mathfrak{g}$  est associé un opérateur différentiel d'ordre 1 sur  $G$ , qu'on notera  $\mathcal{L}_X$ , tel que pour toute fonction  $f \in C^1(G)$  et  $g \in G$ ,

$$\mathcal{L}_X(f)(g) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f(g \exp(tX)). \quad (1.1)$$

**Théorème 1.1.2** (Hunt-Heyer, [39]). *Si  $(Z_t)_{t \geq 0}$  est un mouvement brownien à droite sur  $G$ , alors il existe un vecteur  $V \in \mathfrak{g}$  et une famille libre  $X_1, \dots, X_n \in \mathfrak{g}$  tels que pour toute fonction  $f \in C_c^2(G)$ , on ait*

$$\lim_{t \rightarrow 0} \mathbb{E} \left[ \frac{f(Z_t) - f(\text{Id})}{t} \right] = \left[ \mathcal{L}_V(f) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \mathcal{L}_{X_i} \circ \mathcal{L}_{X_i}(f) \right] (\text{Id}). \quad (1.2)$$

Réciproquement, si  $D$  est un opérateur différentiel d'ordre 2 sur  $G$  s'écrivant  $D = \mathcal{L}_V + \sum_{i=1}^n \mathcal{L}_{X_i} \circ \mathcal{L}_{X_i}$ , alors il existe un mouvement brownien à droite sur  $G$  dont le générateur est défini sur  $C_c^2(G)$  et coïncide avec  $D$ , ce qui signifie que l'égalité (1.2) a lieu.

Si la famille  $X_1, \dots, X_n$  de  $\mathfrak{g}$  est génératrice, alors l'opérateur différentiel  $D$  est dit *elliptique*. Considérons une mesure de Haar  $d\mu$  sur  $G$  invariante par translations à droite. Sous l'hypothèse d'ellipticité, il existe une unique fonction  $(t, g) \in \mathbb{R}^{+*} \times G \mapsto p_t(g) \in \mathbb{R}^+$  infiniment différentiable telle que pour tout  $t > 0$ , la mesure  $\mu_t(dg) = p_t(g)\mu(dg)$  soit une mesure de probabilité vérifiant

$$\begin{cases} (\frac{\partial}{\partial t} - D)p = 0, \\ \mu_t \xrightarrow[t \searrow 0]{} \partial_{\text{Id}}. \end{cases} \quad (1.3)$$

On peut alors montrer que la loi marginale d'un mouvement brownien au temps  $t \geq 0$  est  $\mu_t$ . La mesure  $\mu_t$  est l'analogue de la loi gaussienne de variance  $t$  sur  $G$  et la condition d'ellipticité implique que la densité  $p_t$  vérifie  $p_t(g) > 0$ , pour tout  $(t, g) \in \mathbb{R}_+^* \times G$ . Pour toute variable aléatoire  $X$  à valeurs dans  $G$ , notons  $\text{supp}(X)$  le support de sa loi. Si  $D$  est elliptique, pour tout  $t > 0$ ,  $\text{supp}(Z_t) = G$ . Si en outre, le groupe  $G$  est compact, la famille de mesures  $(\mu_t)_{t \geq 0}$  est une interpolation entre la mesure de Dirac en l'identité et la mesure de Haar normalisée  $\mu$  au sens où  $\mu_t$  converge en loi vers  $\mu$ .

On remarque que le générateur  $D$  ne dépend de la famille  $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$  qu'à travers le produit scalaire sur  $\text{vect}\{X_1, \dots, X_n\}$  qui la rend orthonormale. Le théorème précédent montre que les mouvements browniens à droites de générateur elliptique sont paramétrés par les couples formés d'un produit scalaire sur  $\mathfrak{g}$  et d'un vecteur  $V \in \mathfrak{g}$ , appelé vecteur de dérive. Si  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  est un produit scalaire sur  $\mathfrak{g}$ , dont la norme 2 associée est notée  $\|\cdot\|$ , on définit une distance  $d$  sur  $G$  en posant pour toute paire d'éléments  $(\alpha, \beta) \in G^2$ ,

$$d(\alpha, \beta) = \inf \int_0^1 \|\gamma^{-1}(t)\dot{\gamma}(t)\| dt,$$

où l'infimum est pris sur l'ensemble des courbes  $\gamma : [0, 1] \rightarrow G$ ,  $C^1$  par morceaux, telles que  $\gamma(0) = \alpha$  et  $\gamma(1) = \beta$ . Cette distance est par construction invariante par translations à gauche, c'est-à-dire que pour tous  $g, \alpha, \beta \in G$ ,  $d(g\alpha, g\beta) = d(\alpha, \beta)$ .

Un produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  et un vecteur  $V$  de  $\mathfrak{g}$  étant fixés, on peut construire le mouvement brownien à droite qui leur est associé, comme solution d'une équation différentielle stochastique décrivant l'enroulement du mouvement brownien linéaire standard de  $(\mathfrak{g}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  sur le groupe  $G$ . Rappelons que nous supposons que  $G$  est un sous-groupe fermé de  $\text{GL}_N(\mathbb{C})$  et indiquons<sup>1</sup> une façon de construire un tel enroulement. Choisissons un vecteur de dérive  $V \in \mathfrak{g}$ , notons  $(K_t)_{t \geq 0}$  un mouvement brownien sur  $(\mathfrak{g}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ . Désignons par  $(E_{i,j})_{1 \leq i,j \leq N}$  la base canonique de  $M_N(\mathbb{C})$  et par  $\langle\langle dK_t dK_t \rangle\rangle$  la matrice de variation quadratique  $\sum_l \langle\langle (dK_t)_{i,l} (dK_t)_{l,j} \rangle\rangle E_{i,j}$ . L'équation différentielle stochastique

$$dZ_t = Z_t dK_t + \frac{1}{2} Z_t \langle\langle dK_t dK_t \rangle\rangle + Z_t V dt. \quad (1.4)$$

admet une unique solution forte qui est un processus de Markov à valeurs dans  $M_N(\mathbb{C})$ . Le semi-groupe de transition de ce processus de Markov est invariant par translations à gauche par  $G$ . En particulier, la loi du temps d'explosion de la solution ne dépend pas des conditions initiales et on peut en déduire que presque sûrement, la solution n'explose pas.

---

1. On explicitera cette construction dans le cas des groupes compacts classiques dans le chapitre suivant.

Explicitons la formule d'Itô pour le processus  $(Z_t)_{t \geq 0}$ . Soient  $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$  une base orthonormée de  $(\mathfrak{g}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  et  $f \in C^\infty(M_N(\mathbb{C}))$ . Si l'on note  $\partial f_M$  et  $\partial^2 f_M$  les formes différentielles usuelles de  $M_N(\mathbb{C})$  au point  $M \in M_N(\mathbb{C})$ , l'équation (1.4) et la formule d'Itô montrent que

$$\begin{aligned} df(Z_t) &= \partial f_{Z_t}(Z_t V) dt + \sum_{i=1}^{N^2} \partial f_{Z_t}(Z_t X_i) \langle X_i, dK_t \rangle \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{1 \leq i, j \leq N^2} \partial^2 f_{Z_t}(Z_t X_i, Z_t X_j) \langle \langle X_i, dK_t \rangle, \langle X_j, dK_t \rangle \rangle. \end{aligned}$$

Étendons légèrement la définition (1.1) de  $\mathcal{L}$ . Pour tout  $X \in M_N(\mathbb{C})$  et  $\varphi \in C^\infty(M_N(\mathbb{C}))$ , on définit une fonction  $C^\infty(M_N(\mathbb{C}))$  en posant pour  $M \in M_N(\mathbb{C})$ ,  $\mathcal{L}_X(\varphi)(M) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \varphi(M \exp(tX))$ . On a alors  $\partial f_M(MX) = \mathcal{L}_X(f)(M)$  et

$$\mathcal{L}_X \circ \mathcal{L}_X(f)(M) = \mathcal{L}_{X^2}(f)(M) + \partial^2 f_M(MX, MX).$$

La formule d'Itô montre donc que pour tout  $t \geq 0$ ,

$$df(Z_t) = \mathcal{L}_V(f)(Z_t) dt + \sum_{i=1}^n \mathcal{L}_{X_i}(f)(Z_t) \langle X_i, dK_t \rangle + \frac{1}{2} \mathcal{L}_{X_i} \circ \mathcal{L}_{X_i}(f)(Z_t) dt.$$

En particulier, si  $f$  est invariante par l'action de  $G$  par translations à droite sur  $M_N(\mathbb{C})$ , alors, presque sûrement,  $(f(Z_t))_{t \geq 0}$  est constant. On peut en déduire que le processus  $(Z_t)_{t \geq 0}$  est presque sûrement à valeurs dans  $G$ , puis que c'est un mouvement brownien sur  $G$ . En outre, on peut également montrer à partir de la formule précédente que le générateur du processus Markovien  $(Z_t)_{t \geq 0}$  est bien défini sur  $C^2(G)$  et coïncide sur cet espace avec  $D = \mathcal{L}_V + \frac{1}{2} \sum_i \mathcal{L}_{X_i} \circ \mathcal{L}_{X_i}$ . Ce point de vue sera utilisé pour chacun des groupes que nous rencontrerons.

Complétons cette description par une propriété d'invariance de ces mouvements browniens. Appelons mouvement brownien à gauche sur  $G$  un processus de Markov  $(S_t)_{t \geq 0}$  à valeurs dans  $G$  tel que  $(S_t^{-1})_{t \geq 0}$  est un mouvement brownien à droite. Si  $(Z_t)_{t \geq 0}$  est un mouvement brownien à droite solution de l'équation différentielle stochastique (1.4), alors  $(Z_t^{-1})_{t \geq 0}$  est un mouvement brownien à gauche vérifiant

$$d(Z_t^{-1})Z_t = -V dt - dK_t + \frac{1}{2} \langle \langle dK_t, dK_t \rangle \rangle. \quad (1.5)$$

Pour tout  $g \in G$ , désignons par la même notation  $\text{Ad}(g)$  l'application de conjugaisons par  $g$ ,  $\text{Ad}(g) : G \rightarrow G$ , ainsi que sa différentielle  $\text{Ad}(g) : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ . Si  $(Z_t)_{t \geq 0}$  est sans dérive, c'est-à-dire, si  $V = 0$ , alors  $(Z_t)_{t \geq 0}$  est invariant par conjugaison si et seulement si  $\text{Ad}(g)$  est une isométrie de  $(\mathfrak{g}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  pour tout  $g \in G$ . Dans ce cas,  $(Z_t)_{t \geq 0}$  a en outre même loi que  $(Z_t^{-1})_{t \geq 0}$ .

L'hypothèse d'invariance par conjugaison, avec laquelle nous travaillerons par la suite, est très restrictive, puisqu'elle contraint le groupe  $G$  à être le produit cartésien d'un groupe compact et d'un groupe isomorphe à  $\mathbb{R}^n$ .

**Lemme 1.1.3** ([43], Lemme 7.5). *Soit  $G$  un groupe de Lie connexe de dimension finie d'algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$ . Il existe un produit scalaire sur  $\mathfrak{g}$  telle que pour  $g$ ,  $\text{Ad}(g) : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$  est une isométrie si et seulement si  $G$  est isomorphe en tant que groupe de Lie à  $K \times \mathbb{R}^n$ , où  $K$  est un groupe de Lie compact.*



Cette condition peut être reformulée en une condition sur la distance  $d$  associée à  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  : l'action par conjugaison du groupe  $G$  sur son algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$  préserve le produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  si et seulement si  $d$ , qui était invariante par translations à gauche par construction, est en outre invariante par translations à droite. On dit alors que  $d$  est bi-invariante. Si  $d$  est bi-invariante, l'application d'inversion du groupe  $G$  est une isométrie de  $(G, d)$  et toute géodésique passant par l'identité est la restriction d'un morphisme de groupe de  $\mathbb{R}$  dans  $G$ . C'est donc l'image d'un segment de  $\mathfrak{g}$  contenant 0 par l'application  $\exp : \mathfrak{g} \rightarrow G$ . La distance  $d$  prend alors la forme explicite suivante. Pour tout  $\alpha, \beta \in G$ ,

$$d(\alpha, \beta) = \inf\{\|X\| : X \in \mathfrak{g}, \exp(X) = \alpha^{-1}\beta\}.$$

**Exemple 1.1.4.** *Considérons le groupe unitaire  $U(N) = \{U \in GL_N(\mathbb{C}) : U^*U = \text{Id}\}$ , d'algèbre de Lie  $\mathfrak{u}(N) = \{X \in M_N(\mathbb{C}) : X^* + X = 0\}$ , pourvue du produit scalaire qui à chaque paire de vecteurs  $X, Y \in \mathfrak{u}(N)$ , associe  $\langle X, Y \rangle = -\text{Tr}(XY)$ . Pour toute matrice unitaire  $U \in U(N)$ , de valeurs propres  $e^{i\theta_1}, \dots, e^{i\theta_N}$ , avec  $\theta \in ]-\pi, \pi]^N$ ,  $d(\text{Id}, U)^2 = \sum_{i=1}^N \theta_i^2$ .*

Si un groupe compact  $G$  admet un centre fini alors l'espace des métriques bi-invariantes est beaucoup plus restreint. Pour tout  $X \in \mathfrak{g}$ , notons  $\text{ad}(X) \in \text{End}(\mathfrak{g})$ , la dérivée en  $\text{Id}$  de l'application  $\text{Ad} : G \rightarrow GL(\mathfrak{g})$ , donnée par  $\text{ad}(X) = \mathcal{L}_X(\text{Ad})$ . Pour toute paire  $(X, Y) \in \mathfrak{g}$ , notons  $\mathcal{K}_{\mathfrak{g}}(X, Y) = \text{Tr}_{\mathfrak{g}}(\text{ad}(X) \circ \text{ad}(Y))$ . Pour toute variable aléatoire  $X$  sur  $G$ , notons  $\text{supp}(X)$  le support de sa loi.

**Théorème 1.1.5.** *Si  $G$  est un groupe de Lie compact de centre fini, la forme bilinéaire  $-\mathcal{K}_{\mathfrak{g}}$  est, à un scalaire près, l'unique produit scalaire sur  $\mathfrak{g}$  invariant par conjugaison.*

Sous les hypothèses du théorème 1.1.5, on peut donc parler d'un mouvement brownien canonique sur le groupe  $G$ .

**Exemple 1.1.6.** *Le groupe  $SU(N)$  des matrices unitaires de déterminant 1 a un centre isomorphe à  $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ . Si  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  désigne le produit scalaire de  $\mathfrak{u}(N)$ , défini dans l'exemple 1.1.4, alors pour toute paire de vecteurs  $X, Y \in \mathfrak{su}(N) = \{u \in \mathfrak{u}(N) : \text{Tr}(u) = 0\}$ ,  $\mathcal{K}_{\mathfrak{su}(N)}(X, Y) = -2N\langle X, Y \rangle$ . En revanche, le centre de  $U(N)$  est isomorphe au cercle  $\{z\text{Id} : z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}$  et  $\mathfrak{u}(N) = i\text{Id} \oplus \mathfrak{su}(N)$ . La seule forme linéaire sur  $\mathfrak{su}(N)$  invariante par conjugaison est la forme nulle. L'espace des produits scalaires sur  $\mathfrak{u}(N)$  invariant par conjugaison est donc de dimension 2 : si  $b$  est un produit scalaire invariant sur  $\mathfrak{u}(N)$ , alors il existe  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^*$ , tels que, pour tout  $u = (i\theta, x) \in \mathfrak{u}(N)$ ,  $b(u, u) = \alpha\theta^2 + \beta\langle x, x \rangle = \frac{1}{N}(\beta - \frac{1}{N}\alpha)\text{Tr}(u)^2 - \beta\text{Tr}(u^2)$ .*

Le théorème 1.1.5 admet le corollaire suivant.

**Corollaire 1.1.7.** *Si  $G$  est un groupe de Lie compact de centre fini, il existe, à changement de temps près, un unique mouvement brownien invariant par conjugaison sur  $G$ , tel que  $\text{supp}(Z_1) = G$ .*

**Exemple 1.1.8.** *L'application  $\varphi : g \in SU(2) \mapsto \text{Ad}(g) \in \text{Isom}(\mathfrak{su}(2), \mathcal{K}_{\mathfrak{su}(2)}) \simeq SO(3)$ , est un morphisme de groupe surjectif ayant pour noyau  $\{-\text{Id}, \text{Id}\}$ . C'est en outre une isométrie : si  $a, b \in \mathfrak{su}(2)$ , alors  $\mathcal{K}_{\mathfrak{su}(2)}(a, b) = \mathcal{K}_{\mathfrak{so}(3)}(\text{ad}(a), \text{ad}(b))$ . Si  $(\tilde{R}_t)_{t \geq 0}$  (resp.  $(R_t)_{t \geq 0}$ ) est le mouvement brownien canonique sur  $SU(2)$  (resp. sur  $SO(3)$ ), alors  $(\varphi(\tilde{R}_t))_{t \geq 0}$  a même loi que  $(R_t)_{t \geq 0}$ .*

Nous supposons désormais que  $G$  est un groupe compact et on considère  $(Z_t)_{t \geq 0}$  un mouvement brownien invariant par conjugaison sur  $G$ . On munit le groupe  $G$  de sa mesure de Haar normalisée et si  $f$  est une fonction continue sur  $G$ , on note son intégrale par rapport à la mesure de Haar

$$\int_G f(g) dg.$$

### 1.1.2 Fonctions invariantes par conjugaison, théorème de Peter-Weyl

Si  $G$  agit sur un ensemble  $E$ , notons  $E^G$  l'ensemble des points de  $E$  fixes par  $G$ . Rappelons qu'une représentation irréductible de dimension finie d'un groupe  $G$  est la donnée d'un espace vectoriel complexe de dimension finie  $V$  et d'un morphisme  $\rho : G \rightarrow \mathrm{GL}_{\mathbb{C}}(V)$  tel que les seuls sous-espaces vectoriels stables par  $\rho(G)$  de  $V$  sont  $\{0\}$  et  $V$ . Si  $(V_1, \rho_1)$  et  $(V_2, \rho_2)$  sont deux représentations, le groupe  $G$  agit sur  $\mathrm{Hom}(V_1, V_2)$  : si  $g \in G$  et  $f \in \mathrm{Hom}(V_1, V_2)$ ,  $g.f = \rho_2(g)f\rho_1(g^{-1})$ . On dit que ces deux représentations sont isomorphes si il existe un isomorphisme  $f \in \mathrm{Hom}(V_1, V_2)^G$ , on note alors  $V_1 \simeq_G V_2$ . Si  $G$  est un groupe compact, le lemme de Schur caractérise  $\mathrm{Hom}(V_1, V_2)^G$  : soit  $V_1 \simeq_G V_2$ , via un isomorphisme  $\varphi$  et alors  $\mathrm{Hom}(V_1, V_2)^G = \mathbb{C}\varphi$ , soit  $\mathrm{Hom}(V_1, V_2)^G = \{0\}$ .

Soit  $(V, \rho)$  une représentation irréductible de  $G$ . En moyennant par rapport à la mesure de Haar un produit scalaire hermitien arbitrairement choisi sur  $V$ , on obtient un produit scalaire hermitien invariant par  $G$ . Le lemme de Schur implique qu'il existe, à un scalaire près, un unique produit scalaire invariant sur  $V$ . En particulier, l'application d'adjonction  $*$  :  $\mathrm{End}(V) \rightarrow \mathrm{End}(V)$  est définie indépendamment du choix du produit hermitien invariant.

**Lemme 1.1.9.** *Soient  $(V, \rho)$  une représentation irréductible de  $G$ . Si  $(Z_t)_{t \geq 0}$  est un mouvement brownien invariant sur  $G$ , sans dérive, alors il existe une constante  $c_\rho \in \mathbb{R}_+$ , telle que pour tout  $t \geq 0$ ,*

$$\mathbb{E}[\rho(Z_t)] = e^{-c_\rho t} \mathrm{Id}_V. \quad (1.6)$$

*Preuve.* L'invariance de  $Z$  entraîne que pour tout  $t \geq 0$ ,  $\mathbb{E}[\rho(Z_t)] \in \mathrm{End}(V)^G$ . De plus, pour  $s, t \geq 0$ ,  $\mathbb{E}[\rho(Z_{t+s})] = \mathbb{E}[\rho(Z_t)]\mathbb{E}[\rho(Z_s)] \in \mathrm{End}(V)^G$ . D'après le lemme de Schur, il existe  $c_\rho \in \mathbb{C}$  tel que  $\mathbb{E}[\rho(Z_t)] = e^{c_\rho t} \mathrm{Id}_V$ . En outre,  $(Z_t)_{t \geq 0}$  a même loi que  $(Z_t^{-1})_{t \geq 0}$ , donc  $\mathbb{E}[\mathrm{Tr}_V(\rho(Z_t))] \in \mathbb{R}$ . Comme le groupe est compact, on en déduit que  $c_\rho \geq 0$ .  $\square$

Une autre conséquence importante est la formule d'orthogonalité des caractères. Pour tout espace vectoriel  $V$  de dimension finie, on désignera respectivement par  $\mathrm{Tr}_V$  et  $\mathrm{tr}_V$  la trace usuelle de  $\mathrm{End}(V)$  et sa normalisation vérifiant  $\mathrm{tr}_V(\mathrm{Id}_V) = 1$ . Soient  $(V, \rho_V)$  et  $(W, \rho_W)$  deux représentations irréductibles de  $G$ . Soient  $A \in \mathrm{End}(V)$  et  $B \in \mathrm{End}(W)$ . Si  $V \not\simeq_G W$ , alors  $\int_G \mathrm{Tr}_V(A\rho_V(g))\overline{\mathrm{Tr}_W(B\rho_W(g))} dg = 0$ . Si  $V = W$ , alors

$$\int_G \mathrm{Tr}_V(A\rho_V(g))\overline{\mathrm{Tr}_W(B\rho_W(g))} dg = \frac{1}{\dim(V)} \mathrm{Tr}_V(AB^*). \quad (1.7)$$

Le théorème suivant montre que les formules (1.6) et (1.7) permettent en principe d'intégrer toute fonction de  $L^2(G, dg)$  contre une marginale unidimensionnelle du mouvement brownien ou contre la mesure de Haar<sup>2</sup>. Désignons par  $\hat{G}$  l'ensemble des classes d'isomorphismes des représentations

2. Un outils d'intégration fondamental sur les groupes de Lie compact est la formule de Weyl. Nous n'utiliserons pas cette formule dans ce texte, il semble délicat d'en extraire des informations asymptotiques, lorsque la dimension du groupe tend vers l'infini, afin de retrouver les résultats énoncés dans la section 1.3.

irréductibles de  $G$ . Pour tout  $\lambda = (V_\lambda, \rho_\lambda) \in \hat{G}$ , soit  $R_\lambda$  l'ensemble des coefficients matriciels de la représentation  $\lambda$ , c'est-à-dire, l'ensemble de fonctions  $\{g \in G \mapsto \text{Tr}_{V_\lambda}(A\rho_\lambda(g)) : A \in \text{End}(V_\lambda)\}$ . Enfin, notons  $\mathcal{R} = \bigoplus_{\lambda \in \hat{G}} \mathcal{R}_\lambda$ .

**Théorème 1.1.10** (Peter-Weyl, [8]). *L'ensemble  $\mathcal{R}$  est dense pour la norme uniforme dans  $C(G)$ .*

Rappelons que  $L^2(G, dg)$  est pourvue d'une structure d'algèbre pour le produit de convolution usuel. Notons

$$\begin{aligned} \Theta : \bigoplus_{\lambda \in \hat{G}} \text{End}(V_\lambda) &\longrightarrow \mathcal{R} \\ A &\longmapsto \left( g \mapsto \dim(V_\lambda) \text{Tr}_{V_\lambda}(A\rho_\lambda(g^{-1})) \right). \end{aligned}$$

Munissons  $\bigoplus_{\lambda \in \hat{G}} \text{End}(V_\lambda)$ , du produit scalaire qui associe à  $(A, B) \in \text{End}(V_\lambda) \times \text{End}(V_\mu)$ ,  $\langle A, B \rangle = \dim(V_\lambda) \text{Tr}(AB^*)$ , si  $\lambda = \mu$  et 0, sinon. La formule (1.7) montre que  $\Theta$  est un anti-isomorphisme d'algèbre qui est en outre une isométrie d'inverse

$$\begin{aligned} \Theta^{-1}x : \mathcal{R} &\longrightarrow \bigoplus_{\lambda \in \hat{G}} \text{End}(V_\lambda) \\ \phi &\longmapsto \sum_{\lambda} \hat{\phi}(\lambda), \end{aligned}$$

où pour toute fonction  $\phi \in \mathcal{R}$  et toute représentation  $\lambda = (V_\lambda, \rho_\lambda) \in \hat{G}$ ,

$$\hat{\phi}(\lambda) = \int_G \rho_\lambda(g) \phi(g) dg \in \text{End}(V_\lambda).$$

D'après le théorème de Peter-Weyl, ces deux isomorphismes se prolongent en des isométries unitaires entre  $L^2(G, dg)$  et  $\overline{\bigoplus_{\lambda \in \hat{G}} \text{End}(V_\lambda)}$ . Cette décomposition est analogue à la décomposition en série de Fourier des fonctions périodiques. Appliquons la à la fonction  $p_t \in L^2(G, dg)$ . Pour toute représentation irréductible  $\lambda = (V_\lambda, \rho_\lambda)$  de  $G$  et  $g \in G$ , notons

$$\Sigma_\lambda(g) = \Theta(\text{Id}_{V_\lambda}) = \dim(V_\lambda) \text{Tr}(\rho_\lambda(g)).$$

En utilisant la notation du Lemme 1.1.9, on trouve que pour tout  $t > 0$ , l'égalité suivante a lieu dans  $L^2(G, dg)$ ,

$$p_t = \sum_{\lambda \in \hat{G}} e^{-c_\lambda t} \Sigma_\lambda. \quad (1.8)$$

On peut en outre montrer la convergence de cette somme en des sens plus forts.

**Théorème 1.1.11** ([39]). *Pour tout  $\eta > 0$ , la série de fonctions  $\sum_{\lambda \in \hat{G}} e^{-c_\lambda t} \Sigma_\lambda$  converge uniformément sur  $[\eta, \infty[ \times G$  vers la fonction  $p_t$ .*

**Exemple 1.1.12.** *Si  $G = \text{U}(1)$ ,  $\mathfrak{g} = i\mathbb{R}$  est munie du produit scalaire usuel, le mouvement brownien est égal en loi à  $(e^{iBt})_{t \geq 0}$ . Les représentations irréductibles sont les applications  $z \in \text{U}(1) \mapsto z^n \in \text{U}(1)$  et  $\mathbb{E}[e^{inBt}] = e^{-\frac{n^2 t}{2}}$ . La décomposition (1.8) correspond à la décomposition en*

série de Fourier de  $\theta \mapsto p_t^{U(1)}(e^{i\theta})$  et  $p_t^{U(1)}(e^{i\theta}) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-\frac{n^2 t}{2}} e^{in\theta}$ . Un calcul direct montre que la densité d'une marginale est donnée par

$$p_t^{U(1)}(e^{i\theta}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-\frac{(\theta - 2n\pi)^2}{2t}},$$

expression qui est la transformée de Poisson de la formule précédente.

Si  $G = \mathrm{SU}(2)$ ,  $G$  est isomorphe au groupe des quaternions unitaires  $U_{\mathbb{H}}(1) = \{q \in \mathbb{H} : q^*q = 1\}$  par l'application  $\begin{pmatrix} a & -\bar{b} \\ b & \bar{a} \end{pmatrix} \in \mathrm{SU}(2) \mapsto a + bj \in U_{\mathbb{H}}(1)$ . L'algèbre de Lie  $\mathfrak{su}(2)$ , munie du produit scalaire  $-\mathcal{K}_{\mathfrak{su}(2)}$  a pour image l'algèbre de Lie  $\mathbb{H}^0 = \{q \in \mathbb{H} : \mathrm{Re}(q) = 0\}$ , munie du produit scalaire  $(q, \sigma) \in \mathbb{H}^{0^2} \mapsto 4\mathrm{Re}(x^*y)$ . Le générateur du mouvement brownien sur  $\mathrm{SU}(2)$  associé à ce produit scalaire est  $\Delta_{\mathfrak{su}(2)} = \frac{1}{8}(\mathcal{L}_i^2 + \mathcal{L}_j^2 + \mathcal{L}_k^2)$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\mathrm{SU}(2)$  agit linéairement sur l'espace  $\Lambda_n$  des polynômes homogènes de degré  $n$  par changement de coordonnées. On peut montrer facilement que l'on définit ainsi une représentation irréductible de dimension  $n+1$  telle que si  $\theta \in \mathbb{R}$ ,  $\mathrm{Tr}_{\Lambda_n}\left(\begin{pmatrix} e^{i\theta} & \\ & e^{-i\theta} \end{pmatrix}\right) = \sum_{k=0}^n e^{i(n-2k)\theta} = \frac{\sin((n+1)\theta)}{\sin \theta}$ . Si l'on note  $T_n$  le  $n$ ème polynôme de Tchebycheff de seconde espèce, c'est-à-dire le polynôme de degré  $n$  tel que  $T_n(\cos(\theta)) = \frac{\sin((n+1)\theta)}{\sin \theta}$ , alors pour tout  $g \in \mathrm{SU}(2)$ ,

$$\Sigma_{\Lambda_n}(g) = (n+1)T_{n+1}\left(\frac{1}{2}\mathrm{Tr}(g)\right).$$

D'autre part, une manière d'expliciter la constante  $c_{\Lambda_n}$  est de calculer l'action du générateur  $\frac{1}{2}\Delta_{\mathfrak{su}(2)}$  sur un polynôme homogène. Comme l'opérateur  $\Delta_{\mathfrak{su}(2)}$  commute à l'action de  $\mathrm{SU}(2)$  sur  $\Lambda_n$ , on sait d'après le lemme de Schur que celui-ci agit par multiplication par une constante  $-c_{\Lambda_n}$  sur  $\Lambda_n$ . On trouve par exemple,  $\Delta_{\mathfrak{su}(2)}X^n = -\frac{n(n+2)}{8}X^n$ . On en déduit que  $c_{\Lambda_n} = \frac{n(n+2)}{16}$  et pour tout  $g \in \mathrm{SU}(2)$ , ayant pour valeur propre  $e^{i\theta}$ ,

$$\begin{aligned} p_{8t}^{\mathrm{SU}(2)}(g) &= \sum_{n \geq 0} (n+1) e^{-\frac{n(n+2)t}{2}} T_{n+1}\left(\frac{1}{2}\mathrm{Tr}(g)\right) \\ &= \frac{e^{\frac{t}{2}}}{e^{i\theta} - e^{-i\theta}} \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} n e^{-\frac{n^2 t}{2}} e^{in\theta} \end{aligned}$$

Remarquons au passage, que l'on peut exprimer le noyau de la chaleur sur  $\mathrm{SU}(2)$  en fonction de celui sur  $U(1)$  : si  $g \in \mathrm{SU}(2)$  admet comme valeur propre  $e^{i\theta}$ , alors

$$\begin{aligned} p_{8t}^{\mathrm{SU}(2)}(g) &= \frac{e^{\frac{t}{2}}}{2 \sin(-\theta)} \partial_{\theta} p_t^{U(1)}(e^{i\theta}) \\ &= \frac{e^{\frac{t}{2}}}{2t\sqrt{2\pi t}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{\theta - 2n\pi}{\sin \theta} e^{-\frac{(\theta - 2n\pi)^2}{2t}}. \end{aligned}$$

Nous nous concentrerons dans ce mémoire sur les trois séries de groupes de Lie compacts orthogonale, unitaire et symplectique. Rappelons que les éléments de la troisième sont les groupes de matrices  $\mathrm{Sp}(2N) = \{S \in \mathrm{U}(2N) : S^t J S = J\}$ , où  $J = \begin{pmatrix} 0 & I_N \\ -I_N & 0 \end{pmatrix}$ . Lorsque le groupe

$G$  fait partie de ces trois séries, il existe une autre famille dense dans l'espace  $L^2(G, dg)$ , qui a le désavantage de ne pas être orthogonale mais qui se comporte bien quand la dimension des groupes tend vers l'infini.

### 1.1.3 Dualité de Schur-Weyl

Il s'agit simplement de l'ensemble  $\mathcal{O}$  des polynômes homogènes en les coefficients et leurs conjugués complexes, des éléments de ces groupes vus comme matrices complexes. Pour tout polynôme  $P \in \mathcal{O}$  sur  $G$ , de degré  $d$ , il existe  $n, m \in \mathbb{N}$  avec  $n + m = d$  et  $M \in \text{End}((\mathbb{C}^N)^{\otimes d})$ , vérifiant pour tout  $g \in G$ ,

$$P(g) = \text{Tr}(M.g^{\otimes n} \otimes \bar{g}^{\otimes m}). \quad (1.9)$$

Remarquons que pour les groupes orthogonaux et symplectiques, quitte à modifier  $M$ , on peut supposer que  $m = 0$ . En effet, notons  $V$  la représentation standard de  $G$ . Pour tout  $g \in G$ , la matrice de la représentation de  $g$  sur  $V^*$ , dans la base base duale de la base canonique, est  $\bar{g}$ . Cet argument peut se reformuler ainsi. Si  $G$  est orthogonal ou symplectique, alors la représentation  $V$  vérifie  $V \simeq_G V^*$ , où l'isomorphisme est un isomorphisme de représentations complexes, unique à un scalaire près et associé canoniquement à une forme bilinéaire symétrique ou antisymétrique fixée par  $G$ . En revanche, si  $G$  est unitaire, alors  $V \not\simeq_G V^*$  en tant que représentation complexe.

De façon analogue au lemme de Schur, la dualité de Schur-Weyl permet de caractériser les fonctions de  $\mathcal{O}$  invariantes par conjugaison. Pour  $M \in \text{End}((\mathbb{C}^N)^{\otimes d})$ , le polynôme (1.9) est invariant par conjugaison si et seulement si l'action de  $M$  commute à celle de  $G$  sur  $V^{\otimes n} \otimes V^{*\otimes m}$ . La dualité de Schur-Weyl décrit explicitement l'algèbre  $\text{End}(V^{\otimes n} \otimes V^{*\otimes m})^G$  des endomorphismes de  $V^{\otimes n} \otimes V^{*\otimes m}$  commutant à l'action de  $G$ . Informellement, ces algèbres sont engendrées linéairement par les appariements des tenseurs de  $V^{\otimes n} \otimes V^{*\otimes m} \otimes V^{*\otimes n} \otimes V^{\otimes m} \simeq \text{End}(V^{\otimes n} \otimes V^{*\otimes m})$ .

Donnons un analogue élémentaire de la dualité de Schur-Weyl pour le groupe symétrique  $\mathfrak{S}_N$ , agissant sur  $V = \mathbb{C}^N$  par permutation des éléments de la base canonique. Cette action est orthogonale et on a donc  $V \simeq_{\mathfrak{S}_N} V^*$ . Notons  $\mathcal{P}_d$  l'ensemble des partitions de  $S = \{1, \dots, d\} \times \{-1, 1\}$  et munissons  $\mathbb{C}[\mathcal{P}_d]$  d'une structure d'algèbre de la façon suivante. Considérons deux partitions  $\pi, \eta \in \mathcal{P}_d$  que l'on représente dans le plan. La concaténation de  $\pi$  au dessus de  $\eta$  induit une partition  $\pi \circ \eta \in \mathcal{P}_d$  et  $l(\pi, \eta)$  blocs situés au milieu du diagramme (voir figure 1.1). Pour  $z \in \mathbb{C}^*$ , on pose alors  $\pi.\eta = z^{l(\pi, \eta)} \pi \circ \eta$  et on étend bilinéairement l'application  $\cdot$  à  $\mathbb{C}[\mathcal{P}_d]$ .

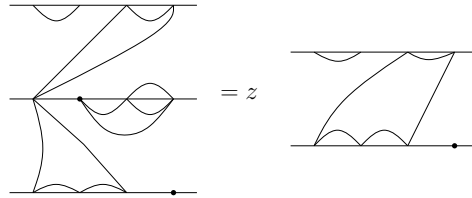


FIGURE 1.1 – Multiplication  $\pi.\eta$  où  $\pi$  et  $\eta$  sont les partitions de  $\{1, \dots, 4\} \times \{-1, 1\}$  données par  $\pi = \{(1, -1), (3, 1), (4, 1)\}, \{(2, -1)\}, \{(3, -1), (4, -1)\}, \{(1, 1), (2, 1)\}\}$  et  $\eta = \{(1, 1), (1, -1), (2, -1), (3, -1)\}, \{(2, 1), (3, 1), (4, 1)\}, \{(4, -1)\}$ .

Cette forme bilinéaire définit une multiplication sur  $\mathbb{C}[\mathcal{P}_d]$ . On définit ainsi une algèbre unitaire que l'on note  $\mathcal{P}_d(z)$ , pourvue d'une représentation naturelle  $\rho$  sur  $V^{\otimes d}$  (avec  $V = \mathbb{C}^N$ ), qui à

chaque partition  $\pi \in \mathcal{P}_d$ , associe

$$\rho(\pi) = \sum_f \bigotimes_{i=1}^d E_{f(i,1),f(i,-1)},$$

où la somme porte sur les fonctions  $f : S \rightarrow \{1, \dots, N\}$ , constantes sur les blocs de  $\pi$ . Introduisons en outre,

$$\rho_0(\pi) = \sum_f \bigotimes_{i=1}^d E_{f(i,1),f(i,-1)},$$

où la somme porte sur les fonctions  $f : S \rightarrow \{1, \dots, N\}$ , constantes sur les blocs de  $\pi$  et prenant des valeurs distinctes sur chaque bloc. Le groupe  $\mathfrak{S}_N$  agit diagonalement sur  $V^{\otimes d}$ . L'application  $\rho_0$  n'est pas un morphisme d'algèbre mais on vérifie facilement que  $\text{End}(V^{\otimes d})^{\mathfrak{S}_N} = \rho_0(\mathcal{P}_d(N))$ . Notons  $\leq$  l'ordre sur  $\mathcal{P}_d$  induit par l'inclusion d'ensemble sur  $S$ . Pour tout  $\pi \in \mathcal{P}_d$ ,  $\rho(\pi) = \sum_{\pi \leq \mu} \rho_0(\mu)$ , on en déduit le résultat suivant.

**Théorème 1.1.13** ([30, 27]). *Pour tout entier  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\text{End}(V^{\otimes d})^{\mathfrak{S}_N} = \rho_0(\mathcal{P}_d(N)) = \rho(\mathcal{P}_d(N))$ .*

Aux trois groupes considérés  $O(N)$ ,  $\text{Sp}(2N)$  et  $U(N)$  sont associées trois algèbres  $\mathcal{B}_d(N)$ ,  $\mathcal{B}_d(-2N)$  et  $\mathcal{B}_{n,m}(N)$ , appelées respectivement *algèbres de Brauer* et algèbre de Brauer murée. Les algèbres  $\mathcal{B}_d(N)$  et  $\mathcal{B}_d(-2N)$  sont les sous-algèbres de  $\mathcal{P}_d(N)$  et  $\mathcal{P}_d(-2N)$  engendrées par les partitions par paires. L'algèbre  $\mathcal{B}_{n,m}(N)$  est la sous-algèbre de  $\mathcal{B}_d(N)$  engendrée par les appariements de  $\{-m, \dots, -1\} \cup \{1, \dots, n\} \times \{-1, 1\}$  tels que chaque paire admet une représentation dans le plan qui croise exactement un axe de coordonnées. On verra dans le chapitre suivant que l'algèbre  $\mathcal{B}_d(-2N)$  admet une représentation sur  $(\mathbb{C}^{2N})^{\otimes d}$  qu'on désignera également par  $\rho$ . Munissons  $\mathcal{P}_d(z)$  de la forme linéaire  $\tau_z$  qui a une partition  $\pi \in \mathcal{P}_d$  de  $\{1, \dots, d\} \times \{-1, 1\}$  associe  $z^{\#\bar{\pi}-d}$ , où  $\bar{\pi}$  est la partition de  $\{1, \dots, d\}$ , image de la projection de  $\pi$  sur l'axe des abscisses. On verra que la représentation  $\rho : \mathcal{B}_n(-2N) \rightarrow \text{End}(V^{\otimes d})$  vérifie

$$\frac{1}{\dim(V)^d} \text{Tr}_{V^{\otimes d}} \circ \rho = \tau_z. \quad (1.10)$$

Notons  $*$  :  $\mathcal{P}_d(z) \rightarrow \mathcal{P}_d(z)$  l'application antilinéaire qui à une partition  $\pi \in \mathcal{P}_d$  associe sa symétrie par rapport à l'axe des abscisses. Les représentations  $\rho$  des sous-algèbres  $\mathcal{A}$  de  $\mathbb{C}[\mathcal{P}_d]$  mentionnées ci-dessus définissent, pour chacune des valeurs de  $z$  considérées, la forme quadratique  $x \in \mathcal{A} \mapsto \text{Tr}(\rho(x)^* \rho(x)) = \tau_z(x^* x)$ .

**Théorème 1.1.14** (Schur-Weyl, [23]). *Pour tous entiers  $n, m \in \mathbb{N}$ ,  $\text{End}(V^{\otimes n} \otimes V^{*\otimes m})^G$  vaut respectivement  $\rho(\mathcal{B}_d(N))$ ,  $\rho(\mathcal{B}_{n,m}(N))$  et  $\rho(\mathcal{B}_d(-2N))$ , si  $G = O(N)$ ,  $U(N)$  ou  $\text{Sp}(2N)$ .*

**Exemple 1.1.15.** *Si  $G = U(N)$  et  $m = 0$ , l'algèbre  $\mathcal{B}_{n,0}$  est isomorphe à l'algèbre du groupe  $\mathbb{C}[\mathfrak{S}_n]$  qui agit naturellement sur  $V^{\otimes n}$  par permutation des tenseurs. Si  $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ , admet  $a_k$  cycles de longueur  $k$  pour tout  $k \in \{1, \dots, n\}$  et  $U \in U(N)$ ,  $\text{Tr}(\rho(\sigma)U^{\otimes n}) = \prod_{k=1}^n \text{Tr}(U^k)^{a_k}$ .*

**Exemple 1.1.16.** *Notons  $V^{(1)} = V = \mathbb{C}^2$  et  $V^{(-1)} = V^*$  la représentation contragrédiente. Si  $G = \text{SU}(2) \simeq \text{Sp}(1)$ , pour toute partition  $\pi$  de  $S = \{1, \dots, d\} \times \{-1, 1\}$ , notons  $t_\pi$  le tenseur*

$$t_\pi = \bigotimes_{\substack{\{u,v\} \in \pi \\ u_1 \leq v_1}} \phi_{u,v} \in \bigotimes_{(x,\varepsilon) \in S} V^{(\varepsilon)} \simeq \text{End}(V^{\otimes d}),$$

où  $\phi_{u,v} \in V^{\langle u_2 \rangle} \otimes V^{\langle v_2 \rangle}$ , vaut  $\text{Id}_{V^{\langle u_2 \rangle}}$ , si  $u_2 = -v_2$  et  $\det_{V^{\langle -u_2 \rangle}}$ , si  $u_2 = v_2$ . Notons  $\langle i j \rangle$  la transposition de  $i$  et  $j$ , vue comme un élément de  $\mathcal{B}_d(-2)$  et  $\langle i j \rangle$  l'appariement composé de  $\{(i, -1), (j, -1)\}$ ,  $\{(i, 1), (j, 1)\}$  et  $\{(k, -1), (k, 1)\}$  pour  $k \in \{1, \dots, d\} \setminus \{i, j\}$ . Remarquons<sup>3</sup> que

$$t_{\langle i i+1 \rangle} = \text{Id}_{V^{\otimes d}} - t_{\langle i j \rangle}. \quad (1.11)$$

On peut montrer que l'ensemble  $\{\langle i i+1 \rangle, \langle i i+1 \rangle, 1 \leq i \leq d-1\}$  engendre  $\mathcal{B}_d(-2)$  en tant qu'algèbre. En outre, on verra au chapitre suivant qu'il existe un choix de signe tel que l'application  $\rho : \pi \in \mathcal{B}_d(-2) \mapsto \pm t_\pi \in \text{End}_{\text{SU}(2)}(V^{\otimes d})$ , soit un morphisme d'algèbre. L'égalité de Mandelstam (1.11), combinée avec ces deux faits, montre que la sous-algèbre  $\text{TL}_d(-2)$  de  $\mathcal{B}_d(-2)$  formée des combinaisons linéaires d'appariements non-croisés vérifie

$$\text{End}_{\text{SU}(2)}(V^{\otimes d}) = \rho(\text{TL}_d(-2)).$$

L'algèbre  $\text{TL}_d(-2)$  est appelée dans la littérature algèbre de Temperley-Lieb.

### 1.1.4 Formules d'intégration sur les groupes classiques

Si  $\mu$  est une mesure invariante par conjugaison sur  $G$ , alors

$$\Phi_\mu = \int g^{\otimes n} \otimes \bar{g}^{\otimes m} \mu(dg) \in \text{End}(V^{\otimes n} \otimes V^{*\otimes m})^G.$$

Expliciter cet élément pour tous  $n, m \in \mathbb{N}$ , équivaut à calculer l'intégrale d'éléments de  $\mathcal{O}$ , c'est-à-dire à calculer l'intégrale de tout polynôme sur  $G$  contre la mesure  $\mu$ .

Le calcul de  $\Phi_\mu$ , où  $\mu$  est la mesure de Haar sur  $G$ , fut réalisé par B. Collins et P. Śniady dans [14]. Dans le chapitre 2, on présente deux approches différentes de la leur, la première fut proposée dans [13] et [57], la seconde est présentée en détail dans le chapitre 2. Tandis que l'argument donné dans [14] repose sur la dualité de Schur-Weyl, celui donné dans [13] et [57] s'appuie sur le premier théorème fondamental de la théorie des invariants (FFT, [[23], Thm. 5.2.2]). Cette approche permet dans le cas orthogonal et symplectique d'explicitier l'élément de l'algèbre de Brauer représentant  $\Phi_\mu$ . L'autre point de vue que l'on propose dans le second chapitre, est de considérer la loi de la marginale  $\mu_t$  d'un mouvement brownien sur  $G$  et de fournir une preuve de ces formules par calcul stochastique, n'utilisant ni théorie des invariants, ni théorie des représentations.

Rappelons l'approche suivie par [13] et [57]. Si  $\mu$  est la mesure de Haar sur le groupe  $G$ , l'application  $\Phi_\mu$  est le projecteur hermitien sur  $(V^{\otimes n} \otimes V^{*\otimes m})^G$ . L'espace  $(V^{\otimes n} \otimes V^{*\otimes m})^G$  est déterminé par le premier théorème des invariants qui en exhibe une famille génératrice. Connaissant une famille génératrice d'un tel espace, on peut calculer l'inverse de sa matrice de Gram pour en déduire une expression pour le projecteur  $\Phi_\mu$ . Pour tous entiers  $i \leq j$ , notons  $\tau_{[i,j]}$  l'idempotent<sup>4</sup>  $\frac{1}{z^{j-i}} \prod_{l=i}^j \langle l l+n \rangle \in \mathcal{B}_{n,m}(N)$ , si  $j \leq n \leq m$ . Notons  $\mathfrak{S}_{n,m}$  le sous-groupe de  $\mathfrak{S}_{n+m}$  isomorphe à  $\mathfrak{S}_n \times \mathfrak{S}_m$  laissant stable  $\{1, \dots, n\}$  et  $\{n+1, \dots, n+m\}$  et pour chaque paire  $(\alpha, \beta) \in \mathfrak{S}_n \times \mathfrak{S}_m$ , désignons par  $\alpha \times \beta \in \mathfrak{S}_{n,m}$  l'élément qui lui est naturellement associée. Le premier théorème des invariants montre que  $(V^{\otimes n} \otimes V^{*\otimes n})^G$  coïncide avec  $\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{2n}} \text{Im}(\rho(\sigma \tau_{[1,n]} \sigma^{-1}))$  si  $G$  est orthogonal ou symplectique, et  $\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{n,n}} \text{Im}(\rho(\sigma \tau_{[1,n]} \sigma^{-1}))$  si  $G$  est unitaire. Si  $n + m$  est

3. Cette égalité est connue sous le nom de relation de Mandelstam.

4. On met en garde le Lecteur contre un léger changement de notations dans le chapitre 2, où cet opérateur sera désigné par  $\tilde{\tau}_{[i,j]}$ .

impair et  $G$  orthogonal ou symplectique ou si  $n \neq m$  et  $G$  est unitaire, alors  $(V^{\otimes n} \otimes V^{*\otimes n})^G = 0$ . Rappelons que  $\tau_z$  est la trace définie sur  $\mathbb{C}[\mathcal{P}_{n+m}]$  par (1.10). Notons

$$\mathbf{G}_{2n}(z) = \frac{z^{3n}}{2^n n!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{2n}} \tau_z(\sigma \tau_{[1,n]}) \sigma \in \mathbb{C}[\mathfrak{S}_{2n}]$$

et  $\mathbf{G}_{n,n}(z)$  sa restriction à  $\mathfrak{S}_n \times \mathfrak{S}_n$  renormalisée,

$$\mathbf{G}_{n,n}(z) = \frac{z^{3n}}{n!} \sum_{\alpha, \beta \in \mathfrak{S}_n} \tau_z((\alpha \times \beta) \tau_{[1,n]}) \alpha \times \beta = \frac{1}{n!} \sum_{\alpha, \beta \in \mathfrak{S}_n} z^{\#\alpha\beta^{-1}} \alpha \times \beta \in \mathbb{C}[\mathfrak{S}_{n,n}].$$

Dénotons respectivement  $\mathcal{H}_n$  et  $D(\mathfrak{S}_n)$  les sous-groupes de  $\mathfrak{S}_{2n}$  et  $\mathfrak{S}_n \times \mathfrak{S}_n$  formés des permutations  $\sigma$  vérifiant  $\sigma \tau_{[1,n]} = \tau_{[1,n]}$ . Notons en outre pour un sous-groupe  $K$  de  $\mathfrak{S}_{2n}$ ,  $\mathcal{P}_K = \frac{1}{|K|} \sum_{\sigma \in K} \sigma$ . Les deux éléments définis ci-dessus vérifient  $\mathbf{G}_{2n}(z) = z^{2n} \mathcal{P}_{\mathcal{H}_n} (\text{Id} + o(\frac{1}{|z|})) \mathcal{P}_{\mathcal{H}_n}$  et  $\mathbf{G}_{n,n}(z) = z^n \mathcal{P}_{D(\mathfrak{S}_n)} (\text{Id} + o(\frac{1}{|z|})) \mathcal{P}_{D(\mathfrak{S}_n)}$ , quand  $|z| \rightarrow \infty$  et sont donc pseudo-inversibles pour  $|z|$  assez grand. Si  $\mathbf{W}_{2n}(z)$  et  $\mathbf{W}_{n,n}(z)$  désignent leurs pseudo-inverses respectifs dans  $\mathbb{C}[\mathfrak{S}_{2n}]$ , on obtient la description suivante<sup>5</sup>.

**Théorème 1.1.17** ([14]). *Si  $n + m = 2p$  et  $G$  est orthogonal ou symplectique,*

$$\Phi_\mu = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{2p}} \rho(\sigma \mathbf{W}_{2p}(z) \tau_{[1,p]} \sigma^{-1}),$$

*où  $z$  vaut respectivement  $N$  et  $-2N$ . Si  $G$  est unitaire et  $n = m$ ,*

$$\Phi_\mu = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{n,n}} \rho(\sigma \mathbf{W}_{n,n}(z) \tau_{[1,n]} \sigma^{-1}).$$

*Dans les autre cas,  $\Phi_\mu = 0$ .*

Les résultats présentés dans le chapitre 2 permettent de montrer ce théorème d'une troisième façon. On présente ici cette approche. Si  $\mu_t$  est la loi de la marginale d'un mouvement brownien sur  $G$  au temps  $t$ , la famille d'endomorphismes  $(\Phi_{\mu_t})_{t \geq 0}$  forme un semi-groupe à valeurs dans  $\text{End}_G(V^{\otimes n} \otimes V^{*\otimes m})$ , dont la restriction à  $(V^{\otimes n} \otimes V^{*\otimes m})^G$  vaut l'identité. On explicite alors la représentation de  $\Phi_{\mu_t}$  dans une algèbre de Brauer par calcul stochastique : on obtient alors un élément  $\Delta(z) \in \mathcal{B}_d(z)$  ou  $\mathcal{B}_{n,m}(z)$ , tel que  $\Phi_{\mu_t} = \rho(\exp(t\Delta(z)))$ . Une décomposition de l'endomorphisme de multiplication par  $\Delta(z)$  sur  $\mathcal{B}_d(z)$  montre alors que  $\Phi_{\mu_t}$  converge quand  $t \rightarrow \infty$ . Si  $n \leq m$ , on considère pour tout entier  $1 \leq k \leq n$ ,

$$Z_k(z) = \frac{(1 - z^{-1})(2k + m - n)}{2} + z^{-1} \sum_{\substack{i < j \\ i, j \in \{1, \dots, k\} \cup \{n+1, \dots, m+k\}}} (i \ j) \in \mathbb{C}[\mathfrak{S}_{n+m}]$$

et

$$Z_k^{n,m}(z) = \frac{2k + m - n}{2} + z^{-1} \sum_{\substack{i < j \\ i, j \in \{1, \dots, k\} \text{ ou } i, j \in \{n+1, \dots, m+k\}}} (i \ j) \in \mathbb{C}[\mathfrak{S}_n \times \mathfrak{S}_m].$$

---

5. La formulation du théorème suivant est légèrement différente de celle qui est donnée dans [14, 13]. Pour retrouver les expressions qui y sont prouvées de l'espérance d'un monôme, il faut contracter les tenseurs apparaissant dans l'énoncé qui suit.



On pose en outre  $Z_0 = Z_0^{n,n} = 0$  et  $Z_0^{n,m} = \frac{m-n}{2} + z^{-1} \sum_{n+1 \leq i < j \leq m} (i \ j)$ . Pour tout  $t \geq 0$ , soit  $s_t$  la fonction symétrique définie par

$$s_t(X_1, \dots, X_k) = \prod_{1 \leq i < j \leq k} (X_j - X_i)^{-1} \det \begin{pmatrix} X_1^{k-2} & X_1^{k-3} & \dots & 1 & e^{-tX_1} \\ X_2^{k-2} & X_2^{k-3} & \dots & 1 & e^{-tX_2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ X_k^{k-2} & X_k^{k-3} & \dots & 1 & e^{-tX_k} \end{pmatrix}. \quad (1.12)$$

**Théorème 1.1.18.** *Si  $G$  est orthogonal ou symplectique*

$$\Phi_{\mu_t} = \sum_{\substack{0 \leq k \leq n \\ \sigma \in \mathfrak{S}_{n+m}}} \frac{1}{2^k (n-2k)!} \rho \left( \sigma s_t(Z_{n-k}, \dots, Z_{n-1}, Z_n) \tau_{[n-k, n]} \sigma^{-1} \right),$$

avec  $z$  valant respectivement  $N$  et  $-2N$ . Si  $G$  est unitaire,

$$\Phi_{\mu_t} = \sum_{\substack{0 \leq k \leq n \\ \sigma \in \mathfrak{S}_n \times \mathfrak{S}_m}} \frac{1}{(n-k)!(m-k)!} \rho \left( \sigma s_t(Z_{n-k}^{n,m}, \dots, Z_{n-1}^{n,m}, Z_n^{n,m}) \tau_{[n-k, n]} \sigma^{-1} \right),$$

avec  $z$  valant  $N$ . En outre, pour tout  $N \in \mathbb{N}^*$ , quand  $t \rightarrow \infty$ , pour  $z \in \{N, -2N\}$ ,

$$\rho(s_t(Z_{n-p}, \dots, Z_{n-1}, Z_n)) \rightarrow \delta_{n+m=2p} \mathbf{W}'_{2p}(z),$$

pour  $z = N$ ,

$$\rho(s_t(Z_{n-p}^{n,m}, \dots, Z_{n-1}^{n,m}, Z_n^{n,m})) \rightarrow \delta_{n=m=p} \mathbf{W}'_{p,p}(z),$$

avec

$$\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{2p}} \rho \left( \sigma \mathbf{W}(z)_{2p} \tau_{[1, p]} \sigma^{-1} \right) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{2p}} \rho \left( \sigma \mathbf{W}(z)_{p,p} \tau_{[1, p]} \sigma^{-1} \right)$$

et

$$\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_p \times \mathfrak{S}_p} \rho \left( \sigma \mathbf{W}_{p,p}(z) \tau_{[1, p]} \sigma^{-1} \right) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_p \times \mathfrak{S}_p} \rho \left( \sigma \mathbf{W}_{p,p}(z) \tau_{[1, p]} \sigma^{-1} \right).$$

On déduit aisément de ce théorème que, lorsque la dimension du groupe est assez grande devant le degré des tenseurs, le semi-groupe d'endomorphismes de  $V^{\otimes n} \otimes V^{*\otimes m}$  converge, quand son paramètre  $t$  tend vers l'infini, vers un endomorphisme dont l'image est incluse dans  $(V^{\otimes n} \otimes V^{*\otimes m})^G$ . La propriété de semi-groupe montre que  $\Phi$  est un projecteur d'image  $(V^{\otimes n} \otimes V^{*\otimes m})^G$ . Comme l'opérateur  $\Phi_{\mu_t}$  commute avec  $\Phi_\mu$ ,  $\Phi = \Phi_\mu$ . Le théorème 1.1.18 permet de la sorte de retrouver le résultat du théorème 1.1.17.

## 1.2 Mesure de Yang-Mills planaire

À partir de la loi d'un mouvement brownien invariant par conjugaison sur un groupe de Lie compact  $G$ , on peut construire un autre processus aléatoire indexé non pas par  $\mathbb{R}$ , mais par les chemins de longueur finie du plan, et qui est compatible avec la concaténation. Heuristiquement, un tel processus donne une façon de relever tout chemin du plan  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}^2 \times G$ . Ce processus est appelé mesure de Yang-Mills euclidienne et a été construit de différentes manières dans [20, 51, 38]. Ces constructions donnent un langage mathématique adéquat pour rendre rigoureuse la notion de mesure de Yang-Mills sur l'espace des connexions d'un fibré principal ayant un espace de base de dimension 2. On donne un aperçu de ces constructions dans le cas plus facile du plan, qui peut être complété par celui des surfaces compactes.

### 1.2.1 Connexion sur un fibré trivial et mesure de Yang-Mills planaire

Une connexion sur le fibré trivial  $p : \mathbb{R}^2 \times G \rightarrow \mathbb{R}^2$  est heuristiquement une manière de relever un chemin de la base  $\mathbb{R}^2$  dans l'espace total  $\mathbb{R}^2 \times G$ , de façon à relier les fibres au dessus de chaque extrémité en respectant l'action du groupe sur chaque fibre (par exemple l'action par multiplication à droite). On peut définir cet objet de façon globale ou infinitésimale. Pour tout chemin  $\gamma$  paramétré par une application  $\tilde{\gamma} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ , notons  $\underline{\gamma} = \tilde{\gamma}(0)$ ,  $\bar{\gamma} = \tilde{\gamma}(1)$  et  $\gamma^{-1}$  le chemin parcouru en sens inverse, paramétré par  $t \in [0, 1] \mapsto \tilde{\gamma}(1-t)$ . Si  $a$  et  $b$  sont deux chemins tels que  $\bar{a} = \underline{b}$ , notons  $a.b$  leur concaténation. Notons  $P(\mathbb{R}^2)$  l'ensemble des chemins de longueur finie dans  $\mathbb{R}^2$ .

**Définition 1.2.1.** Une connexion sur le fibré principal  $p : \mathbb{R}^2 \times G \rightarrow \mathbb{R}^2$  est la donnée d'une famille d'applications  $(T_\gamma)_\gamma$  indexée par les chemins de longueur finie de  $\mathbb{R}^2$  telle que pour tout chemin  $\gamma$ ,  $T_\gamma : p^{-1}(\underline{\gamma}) \rightarrow p^{-1}(\bar{\gamma})$  est équivariante par rapport à la multiplication à droite par  $G$  et pour tous chemins  $a, b$  de longueur finie avec  $\bar{a} = \underline{b}$ ,  $T_{a.b} = T_b T_a$ .

Notons  $\mathcal{M}(\mathbb{R}^2, G)$  l'ensemble des applications  $H : P(\mathbb{R}^2) \rightarrow G$  vérifiant  $H_b.H_a = H_{ab}$ . Une fonction de  $\mathcal{M}(\mathbb{R}^2, G)$  sera dite multiplicative. Pour  $s : \mathbb{R}^2 \rightarrow G$  et  $H \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^2, G)$ , notons  $T^{H,s}$  la connexion telle que pour tout chemin  $\gamma \in P(\mathbb{R}^2)$ ,

$$T_\gamma^{H,s} : (\underline{\gamma}, s(\underline{\gamma})) \in p^{-1}(\underline{\gamma}) \mapsto (\bar{\gamma}, s(\bar{\gamma})H_\gamma).$$

Pour  $s : \mathbb{R}^2 \rightarrow G$ , l'application  $H \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^2, G) \mapsto T^{H,s}$  est une bijection entre fonctions multiplicatives et connexions sur  $p$ . Le changement d'application  $s : \mathbb{R}^2 \rightarrow G$  par multiplication à gauche par une autre application  $j \in G^{\mathbb{R}^2}$  modifie cette bijection comme suit. Pour tout  $j \in G^{\mathbb{R}^2}$ , l'application  $\phi_j : (x, g) \in \mathbb{R}^2 \times G \mapsto (x, j(x)g)$  est appelée transformation de jauge. Pour toute paire  $H \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^2, G)$ ,  $j \in G^{\mathbb{R}^2}$ , on définit une fonction multiplicative en posant pour  $\gamma \in P(\mathbb{R}^2)$ ,

$$(j.H)_\gamma = j(\bar{\gamma})^{-1} H_\gamma j(\underline{\gamma}).$$

Le groupe de jauge  $\mathcal{J} = G^{\mathbb{R}^2}$  agit sur l'espace des connexions par adjonction, de sorte que si  $H \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^2, G)$ ,  $j \in \mathcal{J}$  et  $s : \mathbb{R}^2 \rightarrow G$ ,

$$\phi_j T^{H,s} \phi_j^{-1} = T^{H,js} = T^{s^{-1}js, H, s}.$$

Munissons  $G$  de la tribu borélienne et  $G^{P(\mathbb{R}^2)}$  de la tribu cylindrique  $\mathcal{C} = \sigma(H_\gamma, \gamma \in P(\mathbb{R}^2))$ .

Appelons lacet un chemin  $\gamma \in P(\mathbb{R}^2)$  tel que  $\underline{\gamma} = \bar{\gamma}$  et notons  $L(\mathbb{R}^2)$  ce sous-ensemble de  $P(\mathbb{R}^2)$ . Munissons  $P(\mathbb{R}^2)$  d'une distance en posant pour toute paire  $c_1, c_2 \in P(\mathbb{R}^2)$ ,

$$d(c_1, c_2) = \inf \|\tilde{c}_1 - \tilde{c}_2\|_\infty + |\ell(c_1) - \ell(c_2)|,$$

où l'infimum est pris sur toutes les paramétrisations  $\tilde{c}_1, \tilde{c}_2 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$  des deux chemins  $c_1$  et  $c_2$ . On appellera *mesure de Yang-Mills planaire* une mesure de probabilité YM sur  $(\mathcal{M}(P(\mathbb{R}^2), G), \mathcal{C})$ , telle que

- a) si  $(\gamma_n^j)_{n \geq 0, 1 \leq j \leq m}$  sont des suites de  $P(\mathbb{R}^2)$ ,  $(\gamma^j)_{1 \leq j \leq m} \in P(\mathbb{R}^2)^m$  avec  $d(\gamma_n^j, \gamma^j) \rightarrow 0$ ,  $\overline{\gamma_n^j} = \overline{\gamma^j}$  et  $\underline{\gamma_n^j} = \underline{\gamma^j}$ , alors  $(H_{\gamma_n^j})_{1 \leq j \leq m}$  converge en loi vers  $(H_{\gamma^j})$ .

- b) si  $F_1, \dots, F_k$  sont  $k$  ouverts simplement connexes, bornés, deux à deux disjoints, dont le bord est l'image des lacets  $\partial_{v_1} F_1, \dots, \partial_{v_k} F_k \in L(\mathbb{R}^2)$  basés des points  $v_1, \dots, v_k$ , alors, sous YM,  $(H_{\partial_{v_1} F_1}, \dots, H_{\partial_{v_k} F_k})$  a la même loi que  $(Z_{1,|F_1|}, \dots, Z_{k,|F_k|})$ , où  $|F|$  désigne l'aire d'un domaine  $F$  et  $(Z_{i,t})_{t \geq 0, 1 \leq i \leq k}$  est une famille de  $k$  mouvements browniens invariants par conjugaison sur  $G$ , indépendants et identiquement distribués.

### 1.2.2 Mesure de Yang-Mills discrète

Soit  $\mathbb{G} = (\mathbb{V}, \mathbb{E}, \mathbb{F})$  un graphe fini, plongé dans  $\mathbb{R}^2$ , tel que chaque arête est réalisée par un élément de  $P(\mathbb{R}^2)$ . Notons  $P(\mathbb{G})$  l'ensemble des chemins obtenus par concaténation d'arêtes de  $\mathbb{G}$ ,  $\mathcal{M}(P(\mathbb{G}), G)$  l'ensemble des fonctions multiplicatives sur  $P(\mathbb{G})$ , à valeurs dans  $G$ . Si on fixe une orientation  $\mathbb{E}^+$  des arêtes de  $\mathbb{G}$ , alors  $\mathcal{M}(P(\mathbb{G}), G) \simeq G^{\mathbb{E}^+}$  et la tribu cylindrique  $\sigma(H_\gamma, \gamma \in P(\mathbb{G}))$  coïncide avec l'image de la tribu borélienne. Indiquons comment construire une mesure de probabilité sur  $\mathcal{M}(P(\mathbb{G}), G)$  qui soit la restriction d'une mesure de Yang-Mills planaire. Pour chaque face  $F \in \mathbb{F}$ , si  $e$  est une arête bordant  $F$ , notons  $\partial_e F$  le lacet commençant par  $e$  bordant  $F$ . Notons  $F_\infty \in \mathbb{F}$  la face non bornée de  $\mathbb{G}$  et  $\mathbb{F}_b$  l'ensemble des faces bornées. Si  $e : \mathbb{F} \rightarrow \mathbb{E}$  est une application telle que  $e(F)$  borde  $F$  pour tout  $F \in \mathbb{F}$ , posons pour tout  $h \in \mathcal{M}(P(\mathbb{G}), G)$ ,

$$Q_{\mathbb{G}}(h) = \prod_{F \in \mathbb{F}_b} p_{|F|}(h_{\partial_e F}).$$

Comme les densités du mouvement brownien  $(q_t)_{t \geq 0}$  sont des fonctions invariantes par conjugaison et par inversion, la fonction  $p_{\mathbb{G}}$  ne dépend pas du choix de  $e : \mathbb{F} \rightarrow \mathbb{E}$  et  $Q_{\mathbb{G}}$  est invariante par transformation de jauge. Si  $e \in \mathbb{E}^+$  borde les faces  $F_1$  et  $F_2$ ,  $F = F_1 \cup F_2$ , avec  $c_1$  et  $c_2 \in P(\mathbb{R}^2)$  tels que  $\partial_e F_1 = ec_1$  et  $\partial_{e^{-1}} F_2 = e^{-1}c_2$  alors

$$\begin{aligned} \int_G p_{|F_1|}(h_{\partial_e F_1}) p_{|F_2|}(h_{\partial_{e^{-1}} F_2}) dg_e &= \int_G p_{|F_1|}(h_{c_1} h_e) p_{|F_2|}(h_{e^{-1}} h_{c_2}) dg \\ &= p_{|F|}(h_{c_1} h_{c_2}) = p_{|F|}(h_{\partial F}), \end{aligned} \quad (*)$$

où  $\partial F$  est un lacet bordant  $F$ . En intégrant successivement par rapport aux mesures de Haar  $dg_e$  avec  $e \in \mathbb{E}^+$ , on conclut que

$$\int_{G^{\mathbb{E}^+}} Q_{\mathbb{G}}(h) \bigotimes_{e \in \mathbb{E}^+} dg_e = \int_{G^{\{e \in \mathbb{E}^+ \text{ bordant } F_\infty\}}} p_{|\mathbb{R}^2 \setminus F_\infty|}(h_{F_\infty}^{-1}) \bigotimes_{\substack{e \in \mathbb{E}^+ \\ \text{bordant } F_\infty}} dg_e = 1.$$

La mesure  $YM^{\mathbb{G}}$  sur  $\mathcal{M}(P(\mathbb{G}), G)$ , ayant pour densité  $Q_{\mathbb{G}}$  par rapport à la mesure  $\bigotimes_{e \in \mathbb{E}^+} dg_e$  est donc une mesure de probabilité, elle est appelée *mesure de Yang-Mills discrète* sur  $\mathbb{G}$ . On vérifie sans peine qu'elle vérifie la propriété b) d'une mesure de Yang-Mills restreinte à  $\mathcal{M}(P(\mathbb{R}^2), G)$ .

On peut également définir une telle mesure sur  $\mathcal{M}(P(\mathbb{G}), G)$  sans faire appel à la densité du mouvement brownien, ce qui sera plus adapté au cadre des probabilités libres.

### 1.2.3 Groupe des lacets réduits

Munissons  $P(\mathbb{G})$  de la relation d'équivalence  $\sim$  telle que deux chemins  $c_1$  et  $c_2$  sont équivalents si l'un s'obtient à partir de l'autre en effaçant ou en rajoutant des chemins de la forme  $ee^{-1}$ , avec  $e \in \mathbb{E}$ . Chaque classe d'équivalence contient un unique chemin de longueur minimale qui est dit *réduit*. Les opérations de multiplications partielles et d'inversion  $c \in P(\mathbb{G}) \mapsto c^{-1} \in P(\mathbb{G})$  passent au quotient et définissent sur  $P(\mathbb{G})/\sim$  une structure de groupoïde que l'on note  $RP(\mathbb{G})$ . Notons pour tout  $v \in \mathbb{V}$ ,  $L_v(\mathbb{G})$  l'ensemble des lacets appartenant à  $P(\mathbb{G})$ , qui sont basés en  $v$ . La relation  $\sim$  induit une relation d'équivalence sur  $L_v(\mathbb{G})$  et l'espace quotient est pourvu d'une structure de groupe que l'on note  $RL_v(\mathbb{G})$ . Le groupoïde  $RP(\mathbb{G})$  est libre avec pour base canonique l'image de  $\mathbb{E}^+$  par le quotient  $P(\mathbb{G}) \rightarrow RP(\mathbb{G})$ . Le groupe  $RL_v(\mathbb{G})$  est libre de rang  $\#\mathbb{F}_b$  mais, à l'inverse de  $RP(\mathbb{G})$ , il n'admet pas de base canonique. Une façon de construire une base de  $RL_v$  est de fixer un arbre couvrant  $T$ . Pour chaque paire de sommets  $x, y \in \mathbb{V}$ , notons  $[x, y]_T$  le chemin réduit à valeur dans  $T$  entre  $x$  et  $y$ . La famille formée des lacets  $\beta_e = [v, \underline{e}]_T e [\bar{e}, v]$  pour  $e \in \mathbb{E}^+ \cap T$  forme une base libre de  $RL_v(\mathbb{G})$ . Si  $(\partial_r F)_{F \in \mathbb{F}}$  est une famille de lacets de  $P(\mathbb{G})$ , bordant chaque face bornée de  $\mathbb{G}$ , alors  $\{e \in T \cap \mathbb{E}^+\} \cup \{\partial_r F : F \in \mathbb{F}_b\}$  est une base libre du groupoïde  $P(\mathbb{G})$ . En outre, on peut montrer que si  $(x_F)_{F \in \mathbb{F}_b}$  est une base libre de  $RL_v(\mathbb{G})$ , alors  $\{e \in T \cap \mathbb{E}^+\} \cup \{(x_F)_{F \in \mathbb{F}_b}\}$  est une base libre de  $RP(\mathbb{G})$ .

Un résultat remarquable dû initialement à [28] et complété dans [35] est que l'on peut munir  $L_0(\mathbb{R}^2)$  d'une relation d'équivalence analogue à celle définie sur les lacets d'un graphe de sorte que l'opération de concaténation induit sur l'espace quotient une structure de groupe.

**Définition 1.2.2.** *Un lacet continu  $l : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$  est dit fin si  $l$  est homotope à un lacet constant via une homotopie à valeurs dans  $l(S^1)$ , c'est-à-dire si il existe une application continue  $(z, t) \in S^1 \times [0, 1] \mapsto l_t(z) \in l(S^1)$ , telle que  $l_0 = l$  et  $l_1$  est constant.*

**Théorème 1.2.3** ([35, 28]). *On définit une relation d'équivalence en posant pour toute paire de lacets  $l, l' \in L_0(\mathbb{R}^2)$ ,  $l \sim l'$ , si  $l'l^{-1}$  est un lacet fin. Pour tout lacet  $l \in L_0(\mathbb{R}^2)$  la classe d'équivalence de  $l$  pour  $\sim$  admet un unique élément de longueur minimale que l'on appelle réduction de  $l$ .*

On note l'espace quotient de  $L_0(\mathbb{R}^2)$  par  $\sim$ ,  $RL_0(\mathbb{R}^2)$ . Muni de l'opération composée de concaténation et de réduction, l'espace  $RL_0(\mathbb{R}^2)$  est un groupe. Cependant, contrairement aux groupes  $RL_v(\mathbb{G})$ ,  $RL_0(\mathbb{R}^2)$  n'est pas un groupe libre. En effet, on peut montrer (voir [17]) que ce groupe contient des sous-groupes non-libres en considérant l'espace topologique des anneaux Hawaïiens (voir figure 1.2).

### 1.2.4 Lassos, invariance par tressage

Considérons maintenant une famille adaptée à la définition d'une mesure de Yang-Mills. Si  $F$  est un ouvert borné simplement connexe, bordé par un lacet  $\partial_x F \in L(\mathbb{R}^2)$ , basé en  $x$ , appelons *lasso* d'intérieur  $F$ , de branche  $c$ , tout lacet qui est une concaténation de la forme  $c\partial_{\bar{c}}F c^{-1}$ , où  $c \in P(\mathbb{R}^2)$ . Si  $(l_F)_{F \in \mathbb{F}_b}$  est une famille de lassos basés en  $v_0$ , dont les branches sont incluses dans  $T$ , alors on peut montrer simplement que  $(l_F)_{F \in \mathbb{F}_b}$  est une base libre de  $RL_{v_0}(\mathbb{G})$ . Considérons  $(G_{F,t})_{F \in \mathbb{F}_b, t \geq 0}$  une famille de  $\#\mathbb{F}_b$  mouvements browniens invariant par conjugaison, distribués indépendamment et identiquement et  $(X_e)_{e \in \mathbb{E}^+ \cap T}$  des variables aléatoires à valeurs dans  $G$

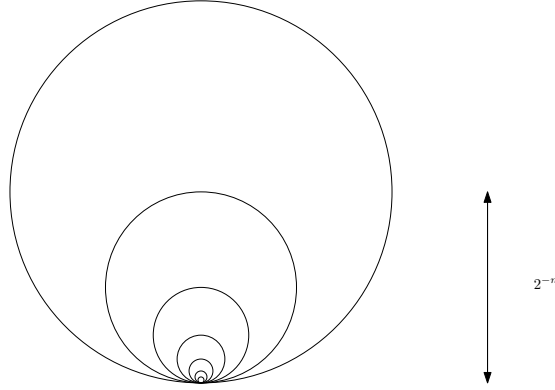


FIGURE 1.2 – Anneaux Hawaïiens plongés dans le plan.

indépendantes de la famille de mouvements browniens considérée. En utilisant l'invariance par conjugaison du mouvement brownien, on montre facilement que l'unique variable aléatoire  $H$  à valeurs dans  $\mathcal{M}(\mathbb{P}(\mathbb{G}), G)$  telle que  $H_{l_F} = G_{F,|F|}$  pour tout  $F \in \mathbb{F}_b$  et  $H_e = X_e$  pour tout  $e \in \mathbb{E}^+ \cap T$  satisfait la propriété b) d'une mesure de Yang-Mills. Cette même invariance du mouvement brownien permet de montrer que la loi de cette variable aléatoire reste inchangée, si l'on remplace  $(l_F)_{F \in \mathbb{F}_b}$  par toute une famille de bases de  $\text{RL}_{v_0}(\mathbb{G})$ . Si  $A, B \in \mathbb{F}_b$ , on appelle  $(l'_F)_{F \in \mathbb{F}}$  la base de  $\text{RL}_{v_0}(\mathbb{G})$  telle que  $l'_B = l_A l_B l_A^{-1}$  et  $l'_F = l_F$  si  $F \neq B$ . La variable  $(H_{l'_F})_{F \in \mathbb{F}_b}$  a même loi que  $(H_{l_F})_{F \in \mathbb{F}_b}$ . Cette propriété d'invariance a été remarquée dans l'article [22], où celle-ci joue un rôle clef à la fois pour construire et pour caractériser la mesure de Yang-Mills dans le cadre des champs d'holonomie markoviens planaires. Donnons une première conséquence simple mais qui sera utile au chapitre 4. Soit  $w$  un mot en  $(l_F)_{F \in \mathbb{F}}$  telle que  $l_B$  se trouve toujours à gauche de  $l_A$  et  $w'$  le mot obtenu à partir de  $w$  en transposant les lettres  $l_A$  et  $l_B$  qui sont adjacentes. Alors  $H_w$  a la même loi que  $H_{w'}$ . On peut en fait montrer beaucoup mieux.

**Lemme 1.2.4** ([29]). *Si  $X = (x_1, \dots, x_n)$  et  $Y = (y_1, \dots, y_n)$  sont deux bases libres du groupe libre  $F_n$ , telles que  $x_i$  est conjuguée à  $y_i$  pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$ , alors on peut obtenir  $Y$  à partir de  $X$  en une succession d'opérations de la forme  $(u_1, \dots, u_n) \mapsto (u'_1, \dots, u'_n)$  telles qu'il existe  $i, j$  avec  $u'_i = u_j u_i u_j^{-1}$  ou  $u_j^{-1} u_i u_j$  et  $u'_k = u_k$  pour  $k \neq i$ .*

**Corollaire 1.2.5.** *Pour toute famille de lassos  $(l'_F)_{F \in \mathbb{F}_b}$  formant une base de  $\text{RL}_{v_0}(\mathbb{G})$ , telle que  $l'_F$  a pour intérieur  $F$  pour tout  $F \in \mathbb{F}_b$ , la collection de variables aléatoires  $(H_{l'_F})_{F \in \mathbb{F}}$  a même loi que  $(H_{l_F})_{F \in \mathbb{F}_b}$ .*

*Preuve.* La loi d'un mouvement brownien invariant étant invariante par inversion, on peut supposer que les lassos  $(l_F)_{F \in \mathbb{F}}$  bordent chaque face avec la même orientation que  $(l_F)_{F \in \mathbb{F}}$ . Pour chaque face  $F \in \mathbb{F}_b$ , il existe  $r_F \in \text{RL}_{v_0}(\mathbb{G})$  tel que  $l'_F = r_F l_F r_F^{-1}$ . Pour tout  $i, j \in \{1, \dots, n\}$ , si  $(Z_1, \dots, Z_n)$  est une famille de  $G$ -mouvements browniens invariants indépendants, alors la famille  $(Z_1, \dots, Z_j Z_i Z_j^{-1}, \dots, Z_n)$  a même loi que  $(Z_1, \dots, Z_n)$ . Combinée avec le résultat de Humphries, cette invariance en loi implique le corollaire.  $\square$

Par la suite, on ne considérera que des familles de lassos munies d'un ordre  $l_{F_1}, \dots, l_{F_n}$ , telles que  $l_{F_1} l_{F_2} \dots l_{F_n}$  soit un lasso d'intérieur  $\mathbb{R}^2 \setminus F_\infty$  basé en  $v_0$ . On note alors l'inverse de cet élément  $l_{F_\infty}$ , de sorte que  $l_{F_1} l_{F_2} \dots l_{F_n} l_{F_\infty}$  est équivalent au lacet constant. Le résultat suivant dû à Artin donne une description de cette famille de bases de  $\text{RL}_{v_0}(\mathbb{G})$ .

**Lemme 1.2.6** (Emil Artin, [7]). *Soit  $X_n$  l'ensemble des familles ordonnées  $x_1, \dots, x_{n+1}$  d'éléments d'un groupe libre  $F_n$  telles que  $x_1, \dots, x_n$  est une base libre et  $x_1 \dots x_{n+1} = 1$ . Pour  $1 \leq i \leq n$  et  $x = (x_i)_{1 \leq i \leq n} \in X_n$ , soit*

$$\Theta_i(x) = (x_1, \dots, x_i x_{i+1} x_i^{-1}, x_i, \dots, x_{n+1}).$$

*Les bijections  $(\Theta_i)_{1 \leq i \leq n}$  engendrent un groupe agissant transitivement sur  $X_n$ . Ce groupe est isomorphe au groupe des tresses.*

### 1.2.5 Mesure de Yang-Mills continue, limites projectives

De façon analogue à la construction d'un mouvement brownien standard, on est tenté de définir une mesure sur  $(\mathcal{M}(\mathbb{P}(\mathbb{R}^2), G), \mathcal{C})$  à partir des mesures construites ci-dessus sur des graphes plongés. En effet, si  $\mathbb{G}'$  est un graphe plongé obtenu à partir d'un graphe plongé  $\mathbb{G}$ , en ajoutant une arête, alors l'application de restriction  $\iota : \mathcal{M}(\mathbb{P}(\mathbb{G}'), G) \rightarrow \mathcal{M}(\mathbb{P}(\mathbb{G}), G)$  est mesurable et un calcul analogue à (\*) montre que la mesure image  $i_* \text{YM}_{\mathbb{G}'}$  est égale à  $\text{YM}_{\mathbb{G}}$ . On est presque dans la situation d'un système projectif de mesures de probabilités, ce qui permettrait d'appliquer un théorème d'extension de Kolmogorov. Il manque un ordre filtrant sur la famille  $\mathcal{G}$  de graphes considérée, c'est-à-dire un ordre tel que pour toute paire d'éléments de  $\mathcal{G}$ , il existe un troisième élément de  $\mathcal{G}$  plus fin que les deux premiers. Un candidat naturel est l'ensemble  $\mathcal{G}_0$  des graphes plongés avec un nombre fini de sommets, d'arêtes de longueur finie et de faces, muni de l'ordre défini par  $\mathbb{G}_1 \leq \mathbb{G}_2$ , si  $\mathbb{P}(\mathbb{G}_1) \supset \mathbb{P}(\mathbb{G}_2)$ . Cependant, on peut se convaincre que cet ordre n'est pas filtrant, en considérant des graphes dont la superposition découpe le plan en une infinité de composantes connexes. Dans [38], l'auteur considère une famille plus petite de graphes mais munie d'un ordre direct afin de définir une mesure sur un espace plus petit, puis démontre un résultat d'extension pour parvenir à l'existence d'une mesure de Yang-Mills. Pour tout graphe plongé  $\mathbb{G} \in \mathcal{G}_0$ , l'application  $i_{\mathbb{G}} : \mathcal{M}(\mathbb{P}(\mathbb{R}^2), G) \rightarrow \mathcal{M}(\mathbb{P}(\mathbb{G}), G)$  est mesurable (quand  $\mathcal{M}(\mathbb{P}(\mathbb{R}^2), G)$  est muni de la tribu  $\mathcal{C}$ ) et on a le résultat suivant.

**Théorème 1.2.7** ([38]). *Il existe une unique mesure sur  $(\mathcal{M}(\mathbb{P}(\mathbb{R}^2), G), \mathcal{C})$  telle que pour tout graphe plongé  $\mathbb{G}$ ,  $(i_{\mathbb{G}})_* \text{YM} = \text{YM}_{\mathbb{G}}$  et telle que pour toute suite de chemins de longueur finie  $(c_n)_{n \geq 0}$  convergeant en 1-variation vers un chemin  $c$  avec  $\underline{c} = \underline{c_n}$  et  $\bar{c} = \bar{c_n}$  pour tout  $n$ , sous  $\text{YM}$ ,  $H_{c_n}$  converge en probabilité vers  $H_c$ .*

Soulignons le fait que la mesure ainsi définie est supportée par les fonctions multiplicatives  $\mathcal{M}(\mathbb{P}(\mathbb{R}^2), G)$ . On pourrait penser que cette propriété est perdue lorsque l'on étend la mesure définie par le théorème de Kolmogorov. On peut néanmoins montrer qu'une deuxième application du théorème de Kolmogorov permet de construire une fonction multiplicative aléatoire, c'est-à-dire une mesure de probabilité sur  $(\mathcal{M}(\mathbb{P}(\mathbb{R}^2), G), \mathcal{C})$ . Par ailleurs, indiquons également que dans la preuve de ces deux résultats d'extensions, l'hypothèse de compacité joue un rôle important.

### 1.2.6 Construction infinitésimale d'une mesure de Yang-Mills par calcul stochastique

Esquissons ici l'approche développée par de Bruce Driver [20] et Ambar N. Sengupta [51]. Bien qu'elle n'ait pas été utilisée dans cette thèse, elle est en un sens que l'on va préciser, plus

proche de l'objet géométrique formé par une connexion aléatoire sur un fibré principal et de l'objet initialement introduit en physique théorique. Rappelons tout d'abord la définition d'une connexion sur un fibré principal dans le cadre élémentaire du fibre trivial  $p : \mathbb{R}^2 \times G \rightarrow \mathbb{R}^2$ .

Une façon de relever chaque chemin de longueur finie du plan en un chemin continu de  $\mathbb{R}^2 \times G$  qui détermine une connexion  $(T_\gamma)_{\gamma \in P(\mathbb{R}^2)}$  est de fixer, en chaque point de  $\mathbb{R}^2$ , une fonction linéaire de  $\mathbb{R}^2$  vers  $\mathfrak{g}$ , c'est-à-dire une 1-forme sur  $\mathbb{R}^2$  à valeurs dans  $\mathfrak{g}$ . Si  $A$  est une 1-forme continue sur  $\mathbb{R}^2$  à valeurs dans  $\mathfrak{g}$ , pour tout chemin  $\gamma$  de longueur finie paramétré par  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$  et  $g \in G$ , soient  $\tilde{\gamma}$  la solution à valeurs dans  $G$  de l'équation différentielle  $\dot{\tilde{\gamma}}(t)\tilde{\gamma}^{-1}(t) = A_{\gamma(t)}(\dot{\gamma}(t))$ , avec pour condition initiale  $\tilde{\gamma}(0) = \text{Id}$  et  $T_\gamma$  l'application  $(\underline{\gamma}, g) \in \mathbb{R}^2 \times G \mapsto (\tilde{\gamma}, \tilde{\gamma}(1)g)$ . La famille  $(T_\gamma)_{\gamma \in P(\mathbb{R}^2)}$  est une connexion de  $p : \mathbb{R}^2 \times G \rightarrow \mathbb{R}^2$ . Posons pour  $(x, g) \in \mathbb{R}^2 \times G$ ,  $(v, X) \in \mathbb{R}^2 \times \mathfrak{g}$ ,

$$\omega_{(x,g)}(v, R_{g*}X) = g^{-1}Xg - g^{-1}A_x(v)g,$$

de sorte que pour  $\gamma \in C^1([0, 1], \mathbb{R}^2)$ ,

$$\omega_{(\underline{\gamma}, g)}\left(\frac{d}{dt}T_{\gamma_t}(\underline{\gamma}, g)\right) = 0 \quad (1.13)$$

et pour tout  $X \in \mathfrak{g}$ ,

$$\omega_{(\underline{\gamma}, g)}\left(\frac{d}{dt}(\underline{\gamma}, g \exp(tX))\right) = X. \quad (1.14)$$

Pour tout  $g \in G$ , cette 1-forme vérifie par construction,

$$\omega \circ dR_g = \text{Ad}(g^{-1}) \circ \omega. \quad (1.15)$$

Une 1-forme sur  $T(\mathbb{R}^2 \times G)$  à valeurs dans  $\mathfrak{g}$  vérifiant les trois conditions (1.13), (1.14) et (1.15) est appelée *forme de connexion*. La forme  $\omega$  définit un champ de plans  $\mathcal{H} = \ker(\omega)$  qui sont tangents aux courbes relevées du plan par la connexion et supplémentaire des espaces tangents induit par l'action à droite de  $G$ . Notons  $\pi^{\mathcal{H}} = \text{Id} - dR \circ \omega$  le projecteur de  $T(\mathbb{R}^2 \times G)$  d'image  $\mathcal{H}$ , associé à cette décomposition, où en tout point <sup>6</sup>  $(x, g) \in \mathbb{R}^2 \times G$ ,  $dR_{x,g}$  est l'application linéaire  $X \in \mathfrak{g} \mapsto \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} (x, g \exp(tX)) \in T_{x,g}(\mathbb{R}^2 \times G)$ . D'après un théorème de Frobenius, un champ de plans d'une variété différentielle est intégrable, c'est-à-dire, l'espace tangent d'un feuilletage de  $\mathbb{R}^2 \times G$ , si et seulement si, il est stable par crochet de Lie. Définissons pour deux champs de vecteurs  $X, Y$  de  $\mathbb{R}^2 \times G$ ,

$$\Omega(X, Y) = \omega([\pi^{\mathcal{H}}(X), \pi^{\mathcal{H}}(Y)]).$$

L'application  $\Omega$  est une 2-forme, elle est appelée *courbure* de la connexion  $T$  et mesure le défaut d'intégrabilité du champ de plans  $\mathcal{H}$ . Si  $\Omega = 0$ , la connexion est dite plate. Dans notre situation, si  $(v, X) \in \mathbb{R}^2 \times \mathfrak{g}$  et  $x \in \mathbb{R}^2$ , alors

$$\pi_{(x,g)}^{\mathcal{H}}(v, R_{g*}X) = (v, R_{g*}A_x(v)) \in T_{(x,g)}\mathbb{R}^2 \times G$$

et évaluée en  $X, Y \in T(\mathbb{R}^2 \times G)$ , la 2-forme de courbure  $\Omega$  prend la forme explicite suivante : pour tout  $(x, g) \in \mathbb{R}^2 \times G$ ,

$$\Omega_{x,g}(X, Y) = g^{-1}\Omega^0(dp(X), dp(Y))g,$$

---

6. Ceci peut reformuler globalement : l'application  $dR : \mathfrak{g} \rightarrow T(\mathbb{R}^2 \times G)$  est la différentielle en  $\text{Id}$  de l'application  $R : G \rightarrow \text{Diff}(\mathbb{R}^2 \times G)$  de multiplication à droite sur les fibres.

où  $\Omega_0$  est la 2-forme sur  $\mathbb{R}^2$  à valeurs dans  $\mathfrak{g}$ , définie par

$$\Omega_0 = dA + [A \wedge A].$$

Si  $A$  se décompose en  $A = A^x dx + A^y dy$ , cette 2-forme s'écrit  $\Omega_0 = f_A(x, y) dx \wedge dy$ , avec

$$f_A = \partial_x A^y - \partial_y A^x + [A^x, A^y].$$

On peut aussi exprimer la courbure à partir du champ d'holonomie. Pour tout point  $(x, g) \in \mathbb{R}^2 \times G$ ,  $v, w \in \mathbb{R}^2$ , considérons  $C_\varepsilon$  le chemin basé en  $x$  bordant le parallélogramme de côté  $\varepsilon v, \varepsilon w$  en parcourant en premier  $v$ . Si  $V, W \in T_{x,g}(\mathbb{R}^2 \times G)$  sont tels que  $dp(V) = v$  et  $dp(W) = w$ , alors

$$T_{C_\varepsilon} \cdot (x, g) = (x, g \exp(\varepsilon^2 \Omega(V, W) + o(\varepsilon^2))). \quad (1.16)$$

Considérons la fonction  $S$  sur l'ensemble  $\mathcal{A}$  des 1-formes de connexion sur le fibré  $\mathbb{R}^2 \times G \rightarrow \mathbb{R}^2$ , définie par

$$S(\omega) = \int_{\mathbb{R}^2} \|f_A(x, y)\|^2 dx dy,$$

où  $\|\cdot\|$  est la norme de  $\mathfrak{g}$  associée au produit scalaire invariant  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . L'application  $S : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$  est appelée *énergie de Yang-Mills*. Considérons  $j \in \mathcal{J}$  une application de  $C^1(\mathbb{R}^2, G)$  et un champ d'holonomie  $(T_\gamma)_{\gamma \in P(\mathbb{R}^2)}$  dirigé par une 1-forme  $A$  sur  $\mathbb{R}^2$  comme ci-dessus, de régularité  $C^1$ . Alors le champ d'holonomie  $(\phi_j \circ T_\gamma \circ \phi_j^{-1})_{\gamma \in P(\mathbb{R}^2)}$  est dirigé par

$$j.A = \text{Ad}(j^{-1}).A + j^{-1}dj,$$

et la connexion  $j.\omega$  associée admet une courbure  $j.\Omega$ , valant en chaque point  $(x, g) \in \mathbb{R}^2 \times G$ ,  $j.\Omega_{(x,g)} = \text{Ad}(g^{-1})j.p^*\Omega_0$ , avec

$$j.\Omega_0 = \text{Ad}(j^{-1}).\Omega_0.$$

L'invariance du produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  par conjugaison, montre que l'énergie de Yang-Mills satisfait  $S(j.\omega) = S(\omega)$ . La fonctionnelle  $S$  a été introduite en physique, où elle joue le rôle d'une action et où on lui associe formellement une "mesure" sur l'espace des connexions  $\mathcal{A}$ ,

$$e^{-S(\omega)} \mathcal{D}\omega,$$

le symbole  $\mathcal{D}\omega$  signifiant que cette mesure est à densité par rapport à une "mesure" invariante par  $\mathcal{J}$  et par translations sur l'espace affine  $\mathcal{A}$ . De façon analogue, on considère en physique l'objet formel  $e^{-S(\gamma)} \mathcal{D}\gamma$  sur les courbes de  $\mathbb{R}^n$ , où  $S(\gamma) = \int_{\mathbb{R}} \|\gamma'(t)\|^2 dt$  si le membre de droite est défini et  $+\infty$  sinon. On est confronté dans ce cadre aux mêmes problèmes, il n'existe pas de mesure sur les fonctions continues qui soit invariante par translation et la fonction  $e^{-S}$  jouant le rôle de densité n'est pas définie sur cette ensemble de fonctions. En revanche, on peut donner un sens à la loi des marginales finies dimensionnelles d'un processus. La loi du mouvement brownien est une formulation mathématique rigoureuse de cette "mesure". La trajectoire d'un mouvement brownien est presque sûrement non-différentiable mais on peut interpréter sa dérivée en un sens faible comme un bruit blanc sur  $\mathbb{R}$ . Par analogie, une façon de donner un sens à  $e^{-S(\omega)} \mathcal{D}\omega$  serait de construire un champ d'holonomie aléatoire dont la courbure serait un bruit blanc sur  $\mathbb{R}^2$  à valeurs dans  $\mathfrak{g}$ . L'expression (1.16) de la courbure en fonction de petits lacets justifie alors heuristiquement la définition d'un champ d'holonomie de Yang-Mills. L'approche de Driver et



de Sengupta est de construire un tel champ en relevant par calcul stochastique un bruit blanc sur  $\mathbb{R}^2$ . Leur approche est propre à la dimension 2 et motivée par le fait suivant. Si  $A$  est une 1-forme sur  $\mathbb{R}^2$  à valeurs dans  $\mathfrak{g}$  de classe  $C^1$ , il existe un élément  $j \in \mathcal{J}$  et une fonction  $f$  telle que pour tout  $u \in \mathbb{R}^2$ ,  $(j.A)_u = f(u)dy$ . La 1-forme de connexion  $j.\omega$  associée à  $A$  vérifie alors <sup>7</sup>

$$j.\Omega_0 = \partial_x f(u)dx \wedge dy.$$

Si  $W$  est un bruit blanc sur  $\mathbb{R}^2$  à valeurs dans l'espace euclidien  $(\mathfrak{g}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ , on voudrait considérer la 1-forme aléatoire  $\frac{d}{dy} \left( W(1_{[0,x] \times [0,y]}) \right) dy$  est une 1-forme aléatoire ayant pour courbure  $W_{(x,y)} dx \wedge dy$ . Une possibilité pour donner un sens à ces objets est de définir des champs d'holonomie sur une classes adaptée de chemins. On peut en effet définir rigoureusement une collection de variables aléatoires  $(H_\gamma)_\gamma$ , indexée par une classe de chemins incluse dans  $P(\mathbb{R}^2)$ , telle que  $H_{[u,v]} = \text{Id}$ , pour tout segment horizontal  $[u, v]$  et telle que pour  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ,  $(H_{[(x,y),(x,y+t)]})_{t \geq 0}$  soit la solution de l'équation différentielle stochastique

$$dH_{[(x,y),(x,y+t)]} = dW \left( 1_{[0,x] \times [0,y+t]} \right) \cdot H_{[(x,y),(x,y+t)]} - \frac{|x|}{2} H_{[(x,y),(x,y+t)]} dt,$$

dirigée par le processus  $\left( W \left( 1_{[0,x] \times [0,y+t]} \right) \right)_{t \geq 0}$ . On montre alors que si  $C_1, \dots, C_k$  sont des carrés disjoints du plan, le vecteur  $(H_{C_i})_{1 \leq i \leq k}$  a même loi que  $(B_{|C_i|}^i)_{1 \leq i \leq k}$ , où  $(B_t^i)_{1 \leq i \leq k, t \geq 0}$  est une famille i.i.d de mouvements browniens invariants par conjugaison.

### 1.2.7 Tribu invariante et spin networks

Les différents exemples de champs d'holonomie donnés ci-dessus sont visiblement différents et sembleraient correspondre à un choix de jauge déterministe ou aléatoire d'une connexion aléatoire. Il s'avère que les lois des champs d'holonomies de Yang-Mills restreintes à une tribu invariante par transformations de jauge sont identiques. Ce fait corrobore l'intuition d'une connexion aléatoire sous-jacente à ces champs d'holonomies. Donnons ici une description de cette tribu, qui sera, dans ce mémoire, la seule utilisée pour traiter des champs d'holonomies aléatoires. Notons  $\mathcal{C}^\mathcal{J}$  la tribu des éléments de  $\mathcal{C}$  invariants par l'action de  $\mathcal{J}$ .

**Lemme 1.2.8.** *Si  $\chi$  est une fonction  $\mathcal{C}_\mathcal{J}$ -mesurable sur  $\mathcal{M}(P(\mathbb{R}^2), G)$ , alors il existe une suite  $(l_i)_{i \geq 0}$  de lacets de longueur finie et  $f : G^\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction mesurable pour la tribu produit et invariante par l'action diagonale de  $G$  sur  $G^\mathbb{N}$  telle que*

$$\chi = f(l_i, i \in \mathbb{N}).$$

**Lemme 1.2.9.** *Si  $\text{YM}$  et  $\text{YM}'$  sont deux mesures de Yang-Mills planaires sur  $(\mathcal{M}(P(\mathbb{R}^2), G), \mathcal{C})$  alors leurs restrictions à  $(\mathcal{M}(P(\mathbb{R}^2), G), \mathcal{C}_\mathcal{J})$  coïncident.*

Donnons des éléments de démonstration de ces deux lemmes <sup>8</sup>.

7. Si  $dr$  et  $d\theta$  désignent les formes différentielles associées aux coordonnées polaires, il existe une jauge  $\tilde{j} \in \mathcal{J}$  et une fonction  $\tilde{f} \in C^1(\mathbb{R}^2)$  telle que  $\tilde{j}.A = \tilde{f}d\theta$ , sur  $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ . On a alors  $\tilde{j}\Omega_0 = \partial_r \tilde{f} dr \wedge d\theta = r \partial_r \tilde{f} dx \wedge dy$ . Dans ??, les auteurs choisissent cette jauge pour définir la mesure de Yang-Mills ou le champ maître à partir d'un bruit blanc.

8. Le lemme 1.2.9 et la preuve qui en est donnée ici sont similaires au lemme 2.1.5 de [38]

*Preuve.* Soit  $\mathbb{G}$  un graphe plongé dans le plan muni d'un arbre couvrant  $T$ , enraciné en un sommet  $v_0$ . Pour  $h \in \mathcal{M}(\mathcal{P}(\mathbb{G}), G)$ , posons  $j_{T,h}(v) = h_{[v,v_0]_T}$ . Alors, pour toute arête  $e \in T$ ,  $(j_{T,h}.h)_e = \text{Id}$  et pour tout lacet  $l \in L_{v_0}(\mathbb{G})$ ,  $(j_{T,h}.h)_l = h_l$ . Soit  $(\partial_r F)_{F \in \mathbb{F}_b}$  une famille de lacets réalisant le bord de chaque face bornée et  $(l_F)_{F \in \mathbb{F}_b}$  la famille de lassos basés en  $v_0$ , dont les branches sont dans  $T$ , naturellement associée. La famille  $(l_F)_{F \in \mathbb{F}_b}$  est une base libre de  $\text{RL}_{v_0}(\mathbb{G})$  et pour tout  $F \in \mathbb{F}_b$ ,  $(j_{T,h}.h)_{l_F} = (j_{T,h}.h)_{\partial_r F}$ . En outre, si  $c_1, \dots, c_k \in \mathcal{P}(\mathbb{G})$  et  $\varphi : h \in \mathcal{M}(\mathcal{P}(\mathbb{G}), G) \mapsto f(h_{c_1}, \dots, h_{c_k})$  est une fonction invariante par le groupe de jauge  $G^{\mathbb{V}}$ , alors

$$\varphi(h) = \varphi(j_{T,h}.h) = f(h_{[v_0, \underline{c_1}]_T c_1 [\overline{c_1}, v_0]_T}, \dots, h_{[v_0, \underline{c_k}]_T c_k [\overline{c_k}, v_0]_T}). \quad (1.17)$$

En décomposant chacun des lacets apparaissant dans le membre de droite de (1.17), on obtient une fonction  $\tilde{f} : G^{\mathbb{F}_b} \rightarrow \mathbb{C}$  invariante par conjugaison diagonale telle que

$$\varphi(h) = \tilde{f}(h_{l_F}, F \in \mathbb{F}_b).$$

Alors

$$\varphi(h) = \varphi(j_{T,h}.h) = \tilde{f}(h_{\partial_r F}, F \in \mathbb{F}_b). \quad (1.18)$$

Un lemme classique sur les tribus cylindriques (voir par exemple le lemme (25.9) de [49]) montre que toute fonction  $\mathcal{C}$ -mesurable s'écrit  $f(H_{c_i}, i \in \mathbb{N})$ , où  $f : G^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{C}$  est mesurable pour la tribu cylindrique et  $(c_i)_{i \geq 0}$  une suite de  $\mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$ . En généralisant la construction menant à l'égalité (1.17) à des graphes avec un nombre dénombrables d'arêtes qui sont autorisées à s'intersecter, on obtient le résultat du Lemme 1.2.8. En outre, la propriété a) de régularité d'un champ d'holonomie de Yang-Mills, complétée par le lemme de classe monotone permettent de montrer le Lemme 1.2.9.  $\square$

Le choix de jauge fait dans la construction de A.N. Sengupta et B. Driver est heuristiquement le même que celui utilisé dans cette preuve en considérant sur les réseaux carrés  $\varepsilon \mathbb{Z}^2$ , avec  $\varepsilon > 0$ , les arbres formés par les axes de coordonnées et les droites horizontales.

On notera désormais YM la mesure de Yang-Mills sur  $(\mathcal{M}(\mathcal{P}(\mathbb{R}^2), G), \mathcal{C}_{\mathcal{J}})$ . Spécifions une famille de fonctions engendrant  $\mathcal{C}_{\mathcal{J}}$ .

Pour tout graphe  $\mathcal{G} = (V, E)$ , on appelle *spin network* sur le graphe  $\mathcal{G}$  la donnée d'un couple  $((W_e)_{e \in E}, (I_v)_{v \in V})$  formé d'une famille  $(W_e, \rho_e)_{e \in E}$  de représentations de  $G$  telle que pour toute arête orientée  $e \in E$ ,  $W_{e^{-1}} = W_e^*$  et d'une famille de tenseurs  $I_v \in \bigotimes_{e \in E, e=v} W_e$ .

Si  $(W_e)_{e \in E^+}$  est une famille de représentations de  $G$ , alors,  $\bigotimes_{e \in E^+} \text{End}(W_e) \simeq \bigotimes_{e \in E^+} W_e \otimes W_e^* \simeq \bigotimes_{v \in V} \bigotimes_{e \in E, e=v} W_e^*$  et on note  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  la forme d'appariement entre  $\bigotimes_{v \in V} \bigotimes_{e \in E, e=v} W_e$  et  $\bigotimes_{e \in E^+} \text{End}(W_e)$ . Si  $(W, I)$  est un spin network, appelons polynôme du spin network  $(W, I)$  la fonction

$$P_{W,I} : G^{E^+} \longrightarrow \mathbb{C} \\ h \longmapsto \langle \bigotimes_{e \in E^+} \rho_e(h_e), \bigotimes_{v \in V} I_v \rangle.$$

Toute fonction polynomiale en les coefficients de matrices des représentations du groupe compact  $G^{\mathbb{E}^+} \simeq \mathcal{M}(\mathcal{P}(\mathbb{G}), G)$  s'écrit comme une combinaison linéaire de polynômes de spin networks sur le graphe  $\mathbb{G}$ . D'après le théorème de Peter-Weyl, si  $G$  est compact, cet espace de fonctions est

dense dans l'espace  $C^0(\mathcal{M}(\mathbb{P}(\mathbb{G}))G)$  pour la norme uniforme. Un avantage de cette présentation sous forme de spin networks est d'identifier les fonctions invariantes de jauge. Si  $(W, I)$  est un spin network sur  $\mathbb{G}$ , le groupe de jauge  $\mathcal{J}_{\mathbb{G}} = G^{\mathbb{V}}$  agit naturellement sur  $\bigotimes_{v \in \mathbb{V}} \bigotimes_{e \in \mathbb{E}, e=v} W_e$  et pour  $j \in \mathcal{J}_{\mathbb{G}}$ ,  $h \in \mathcal{M}(\mathbb{P}(\mathbb{R}^2), G)$ ,

$$P_{W,I}(j.h) = P_{W,j.I}(h).$$

On en déduit le lemme suivant.

**Lemme 1.2.10.** *L'espace vectoriel engendré par les polynômes de spin networks de  $\mathbb{G}$  invariants de jauge est dense pour la norme uniforme dans l'espace des fonctions continues sur  $\mathcal{M}(\mathbb{P}(\mathbb{G}), G)$  invariantes de jauge.*

Notons  $\mathcal{O}_{\mathbb{R}^2}$  l'ensemble des polynômes de spin networks des graphes plongés et  $\mathcal{O}_{\mathbb{R}^2}^{\mathcal{J}}$  l'ensemble des polynômes de  $\mathcal{O}_{\mathbb{R}^2}$  invariants sous l'action de  $\mathcal{J}$ . En appliquant un argument de martingale, puis en appliquant la propriété de régularité de la mesure de Yang-Mills, on peut établir le résultat suivant.

**Lemme 1.2.11.** *La famille  $\mathcal{O}_{\mathbb{R}^2}$  (resp.  $\mathcal{O}_{\mathbb{R}^2}^{\mathcal{J}}$ ) est dense dans l'espace  $L^2(\mathcal{M}(\mathbb{P}(\mathbb{R}^2), G), \mathcal{C}, \text{YM})$  (resp.  $L^2(\mathcal{M}(\mathbb{P}(\mathbb{R}^2), G), \mathcal{C}_{\mathcal{J}}, \text{YM})$ ) pour la norme  $\|\cdot\|_2$ .*

Si  $V$  est une représentation fidèle de  $G$ , on peut montrer que toute représentation irréductible de  $G$  apparaît dans la décomposition d'une représentation  $V^{\otimes n}$ . Si cette hypothèse est satisfaite, alors tout polynôme de spin network  $P_{(V,I)}$  se réécrit  $P_{\tilde{V}, \tilde{I}}$ , où pour chaque  $e \in \mathbb{E}$ , il existe  $n_e \in \mathbb{N}$  tel que  $V_e = V^{\otimes n_e}$  ou  $V_e = V^{*\otimes n_e}$  et en composant éventuellement  $I$  avec des projecteurs équivariants. Si  $G$  est un groupe compact orthogonal, symplectique ou unitaire, les espaces  $\left(\bigotimes_{e \in \mathbb{E}, e=v} V_e\right)^G$  sont décrits par le premier théorème des invariants, selon lequel ils sont engendrés par les appariements des tenseurs associés aux formes bilinéaires invariantes par  $G$ . On peut alors en déduire le résultat suivant.

**Lemme 1.2.12.** *[50, 37] Si  $G$  est un groupe de Lie compact unitaire, orthogonal ou symplectique, l'espace vectoriel des polynômes de spin networks sur  $\mathcal{M}(\mathbb{P}(\mathbb{G}), G)$  laissés invariants par le groupe de jauge est engendré par les fonctions  $h \in \mathcal{M}(\mathbb{P}(\mathbb{G}), G) \mapsto \prod_{i=1}^k \text{Tr}(h_{l_i})$ , où  $l_1, \dots, l_k$  sont  $k$  lacets de  $\mathbb{G}$ .*

Les fonctions  $h \in \mathcal{M}(\mathbb{P}(\mathbb{R}^2), G) \mapsto \text{Tr}(h_l)$  avec  $l \in L(\mathbb{R}^2)$  sont appelées *boucles de Wilson* (si  $l \in L(\mathbb{G})$ , où  $\mathbb{G}$  est un graphe plongé, on les appellera boucles de Wilson de  $\mathbb{G}$ ). Les Lemmes 1.2.10 et 1.2.12 admettent les corollaires suivant.

**Corollaire 1.2.13.** *Si  $G$  est un groupe compact orthogonal, unitaire ou symplectique, alors pour tout graphe fini  $\mathbb{G}$ , l'ensemble des boucles de Wilson sur  $\mathbb{G}$  sont denses dans l'espace des fonctions continues invariantes de jauge  $C^0(\mathcal{M}(\mathbb{P}(\mathbb{G}), G))^{\mathcal{J}_{\mathbb{G}}}$ .*

Disons qu'un groupe satisfait la propriété  $(\mathcal{P})$  s'il vérifie la conclusion du Corollaire 1.2.13. Celle-ci peut être reformulée de façon duale (voir [37]) : un groupe  $G$  satisfait la propriété  $(\mathcal{P})$  si et seulement si pour tout entier  $n$ , les orbites de  $G^n$  sous l'action de conjugaison diagonale sont séparées par les fonctions  $(g_1, \dots, g_n) \in G^n \mapsto \text{Ad}(G).w(g_i, g_i^{-1}, i \in \{1, \dots, n\})$ , avec  $w$  un mot à  $2n$  lettres. On peut facilement se convaincre que la propriété  $(\mathcal{P})$  est vérifiée pour une classe de groupes plus large que celle des trois séries de groupes compacts considérées. Elle est par exemple vérifiée pour tout groupe abélien. On peut également facilement montrer que cette

propriété est stable par produit. En revanche, savoir si elle est stable par quotient ne semble pas être un problème résolu, la liste des groupes de Lie vérifiant  $(\mathcal{P})$  est encore inconnue. Si un groupe satisfait  $(\mathcal{P})$ , le lemme 1.2.11 peut être raffiné comme suit. Notons  $\mathcal{W}_{\mathbb{R}^2}$  l'espace vectoriel engendré par les boucles de Wilson.

**Lemme 1.2.14.** *Si  $G$  est un groupe compact satisfaisant  $(\mathcal{P})$ , alors la tribu  $\mathcal{C}_{\mathcal{J}}$  est engendrée par les boucles de Wilson et  $\mathcal{W}_{\mathbb{R}^2}$  est dense dans  $L^2(\mathcal{M}(\mathbf{P}(\mathbb{R}^2), G), \mathcal{C}_{\mathcal{J}}, \text{YM})$  pour la norme  $\|\cdot\|_2$ .*

On se consacrera par la suite uniquement à l'étude de cette famille d'observables.

### 1.2.8 L'exemple du groupe de structure $\mathbf{U}(1)$

Pour un groupe de Lie  $G$  commutatif, on peut définir simultanément et en une seule opération toutes les variables aléatoires qui constituent un champ d'holonomie aléatoire indéré par  $\mathbf{L}(\mathbb{R}^2)$ , à partir d'un bruit blanc sur le plan. Si  $G = \mathbf{U}(1)$ , considérons  $W$  un bruit blanc à valeurs réelles sur  $\mathbb{R}^2$  muni de la mesure de Lebesgue. Si  $l \in \mathbf{L}(\mathbb{R}^2)$ , la fonction indice définit une fonction  $n_l \in L^2(\mathbb{R}^2, \text{Leb})$ <sup>9</sup> et les lois des marginales fini-dimensionnelles du vecteurs gaussiens  $(W(n_l))_{l \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)}$  sont continues pour la distance  $d$  sur  $\mathbf{L}(\mathbb{R}^2)$ . Définissons une variable aléatoire  $H \in G^{\mathbf{P}(\mathbb{R}^2)}$  en posant pour tout  $c \in \mathbf{P}(\mathbb{R}^2)$ ,

$$H_c = \exp \left( iW(n_{[0, \vec{c}]c[\vec{c}, 0]}) \right).$$

La mesure induite sur  $(G^{\mathbf{P}(\mathbb{R}^2)}, \mathcal{C})$  est alors une mesure de Yang-Mills. Si  $l_1, \dots, l_k \in \mathbf{L}(\mathbb{R}^2)$ ,  $(H_{l_i})_{1 \leq i \leq k}$  a même loi que  $(\exp(iW(n_{l_i})))_{1 \leq i \leq k}$  et

$$\mathbb{E} \left[ \prod_{i=1}^k H_{l_i} \right] = \exp \left[ -\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^2} \left( \sum_{i=1}^k n_{l_i}(x) \right)^2 dx \right].$$

Pour tout lacet  $l \in \mathbf{L}(\mathbb{R}^2)$ , la quantité  $\mathcal{A}_2(l) = \int_{\mathbb{R}^2} n_l^2(x) dx$  est appelée *aire ampéréenne*.

## 1.3 Comportement asymptotique quand la dimension des groupes tend vers l'infini

Le but de cette partie est d'exposer des résultats sur la mesure de Yang-Mills euclidienne pour des groupes de structure de grande dimension. En premier lieu, on présente d'abord le comportement d'un mouvement brownien sur les séries de groupes compacts orthogonaux, symplectiques et unitaires.

---

9. En effet, l'inégalité de Banchoff-Pohl, prouvée dans [3], montre que pour tout lacet  $l \in \mathbf{L}(\mathbb{R}^2)$ ,

$$\int_{\mathbb{R}^2} n_l(x)^2 dx \leq \frac{1}{4\pi} \ell(l)^2.$$

### 1.3.1 Comportement des valeurs propres, concentration de la mesure empirique

Un des premiers résultats dû à Wigner montre que le spectre d'une grande matrice aléatoire hermitienne à coefficients gaussiens se répartit asymptotiquement sur  $\mathbb{R}$  suivant une mesure à support compact. Pour  $N \in \mathbb{N}^*$ , soit  $H \in \mathcal{H}_N$ , telle que les coefficients sur-diagonaux sont indépendants de loi  $H_{i,i} \sim \mathcal{N}_{\mathbb{R}}(0, \frac{1}{N})$  pour  $1 \leq i \leq N$  et  $H_{i,j} \sim \mathcal{N}_{\mathbb{C}}(0, \frac{1}{N})$  pour  $i < j$ . On appelle une telle matrice aléatoire une *matrice de Wigner*. Notons  $\{\lambda_1, \dots, \lambda_N\} \subset \mathbb{R}$  les valeurs propres de  $H$  et  $\mu_N = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta_{\lambda_i}$  leur mesure empirique. Pour tout polynôme  $P$ ,

$$\int_{\mathbb{R}} P(x) \mu_N(dx) = \frac{1}{N} \text{Tr}(P(H)).$$

Si l'on munit l'ensemble  $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$  des mesures de probabilité sur  $\mathbb{R}$  de la topologie faible rendant continue l'évaluation contre les polynômes,  $\mu_N$  est une variable aléatoire qui vérifie le résultat de concentration suivant.

**Théorème 1.3.1** (Wigner). *La suite  $(\mu_N)_{N \geq 1}$  converge en probabilité vers la loi du demi-cercle  $\mu$  sur  $\mathbb{R}$ , donnée par  $\mu(dx) = \mathbf{1}_{|x| \leq 2} \frac{\sqrt{4-x^2} dx}{\pi}$ , dont les moments sont pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,*

$$\int_{\mathbb{R}} x^n \mu(dx) = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n+1}.$$

Au vu de ce théorème, un choix de produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  sur  $i\mathcal{H}_N$ , adapté à l'étude en grande dimension, est celui pour lequel un vecteur gaussien standard sur  $(i\mathcal{H}_N, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  a même loi que  $iH$  où  $H$  est une matrice de Wigner. Ce produit scalaire est la restriction du produit scalaire sur  $M_N(\mathbb{C})$  tel que

$$\langle X, Y \rangle = N \text{Tr}(X^* Y), \quad (1.19)$$

pour  $X, Y \in M_N(\mathbb{C})$ . Ce choix de produit scalaire sur  $\mathfrak{u}(N)$  semble aussi convenable du point de vue de la métrique qu'il induit sur  $U(N)$ . On peut en effet se convaincre que le diamètre de  $U(N)$  admet alors le même ordre de grandeur que la norme d'un mouvement brownien sur  $\mathfrak{u}(N)$ . Il semble donc plausible que pour ce choix de métrique, le mouvement brownien sur  $U(N)$  admette un comportement non trivial. Philippe Biane a en effet démontré le théorème suivant. Considérons un mouvement brownien  $(U_t)_{t \geq 0}$  sur  $U(N)$  pour le choix de métrique donné ci-dessus. Pour tout  $t \geq 0$ , notons  $\mu_{t,N}$  la mesure empirique des valeurs propres de  $U_t$  et munissons l'espace  $\mathcal{M}_1(\mathbb{U})$  des probabilités sur  $\mathbb{U}$  de la topologie faible engendrée par l'évaluation des polynômes.

**Théorème 1.3.2** ([5, 6, 56, 34]). *Pour tout  $t \geq 0$ ,  $\mu_{t,N}$  converge en probabilités vers une mesure  $\mu_t$  avec une densité par rapport à la mesure de Haar sur  $\mathbb{U}$  et un support de la forme  $\exp(i\pi[-b_t, b_t])$ , où  $t \mapsto b_t$  est une fonction croissante telle que  $|b_t| < 1$  si et seulement si  $t < 4$ . Les moments de cette mesure sont donnés par*

$$\int_{\mathbb{U}} x^n \mu_t(dx) = \lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[ \frac{1}{N} \text{Tr}(U_t^n) \right] = \frac{e^{-\frac{nt}{2}}}{n+1} \sum_{k=0}^n \frac{(-nt)^k}{k!} \binom{n+1}{k}. \quad (1.20)$$

La famille de lois limites  $(\mu_t)_{t \geq 0}$  est une interpolation continue entre la mesure de Dirac en 1 et la mesure de Haar sur  $\mathbb{U}$  : pour tout polynôme  $P$ ,  $\int_{\mathbb{U}} P(x) \mu_0(dx) = P(1)$  et

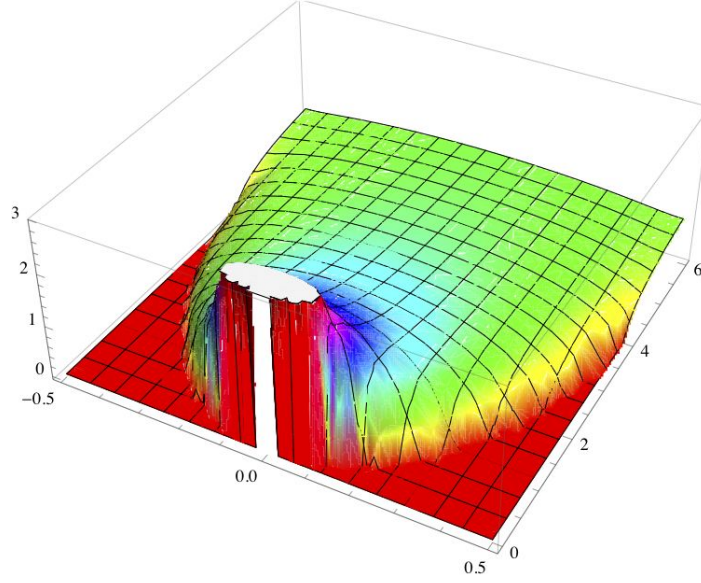


FIGURE 1.3 – La mesure  $\mu_t$  admet une densité  $\rho_t$  par rapport à la mesure de Lebesgue, on représente ci-dessus l'application  $(\theta, t) \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \times [0, 6] \mapsto \rho_t(e^{2i\pi\theta})$ .

$\int_{\mathbb{U}} P(x) \mu_t(dx) \rightarrow \int_0^{2\pi} P(e^{i\theta}) \frac{d\theta}{2\pi}$ . La densité de la mesure  $\mu_t$  peut être calculée implicitement grâce à la série génératrice des moments. La figure 1.3, obtenue grâce à ces formules, représente cette densité. Notons  $L_t(z)$  la série génératrice  $\sum_{n \geq 1} \mu_{t,n} e^{\frac{nt}{2}} z^n$ . On peut montrer que cette série admet un inverse formel  $f_t(z)$  qui admet l'expression suivante

$$f_t(z) = \frac{z}{z+1} e^{tz}.$$

Le théorème de Wigner admet également une version pour d'autres ensembles de matrices. Notons  $\mathfrak{o}(N) = \{X \in M_N(\mathbb{R}) : X + X^* = 0\}$  et  $\mathfrak{sp}(2N) = \{X \in \mathfrak{u}(2N) : JX^t + XJ = 0\}$ , où  $\begin{pmatrix} 0 & I_N \\ -I_N & 0 \end{pmatrix}$ . Désignons respectivement par  $\mu_N^+$  et  $\mu_N^-$  les vecteurs Gaussiens standards sur  $(\mathfrak{o}(N), \langle \cdot, \cdot \rangle)$  et  $(\mathfrak{sp}(2N), \langle \cdot, \cdot \rangle)$  (le produit scalaire est ici la restriction du produit scalaire sur  $M_{2N}(\mathbb{C})$  donné par (1.19)).

**Théorème 1.3.3** (Wigner). *Les mesures aléatoires  $\mu_N^+$  et  $\mu_N^-$  convergent en probabilité vers la loi du demi-cercle  $\mu$ .*

Le même résultat d'universalité est valable pour un mouvement brownien sur  $O(N)$  et  $Sp(2N)$ . Notons respectivement  $\mu_{N,t}^+$  et  $\mu_{N,t}^-$  les mesures empiriques des valeurs propres d'un mouvement brownien sur  $O(N)$  et  $Sp(2N)$ .

**Théorème 1.3.4** ([35]). *Pour tout  $t \geq 0$ , les mesures  $\mu_{t,N}^+$  et  $\mu_{t,N}^-$  convergent en probabilités vers  $\mu_t$ .*

La démonstration du théorème 1.3.2 initialement donné par Philippe Biane, s'appuie sur la diagonalisation de l'action de Laplacien de  $U(N)$  sur les polynômes de  $\mathcal{O}$  invariants par conjugaison, dans la base des caractères des représentations irréductibles. Une analyse de la

décomposition de la fonction  $U \mapsto \frac{1}{N} \text{Tr}(U^n)$  dans cette base et la connaissance explicite des valeurs propres du Laplacien permet d'obtenir le théorème. Une autre approche utilisée par Thierry Lévy consiste à formuler ce problème de calcul de moments dans l'algèbre du groupe symétrique. Dans la base de  $\mathcal{O}_n$  donnée par les fonctions  $N^{-\#\sigma} \text{Tr}(\sigma U^{\otimes n}) = N^{-\#\sigma} \prod_k \text{Tr}(U^k)^{a_k(\sigma)}$  (où pour tout  $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ ,  $\#\sigma$  désigne le nombre de cycles de  $\sigma$ ), le Laplacien admet une matrice de la forme  $A + \frac{1}{N^2} B$  avec  $A, B$  indépendantes de  $N$ . Un avantage de cette approche sur celle de Philippe Biane est qu'elle ne demande pas de comprendre comment les termes divergents intervenant dans la décomposition de  $\frac{1}{N} \text{Tr}(U^n)$  en caractères irréductibles se compensent. Un autre avantage est qu'elle se généralise facilement pour étudier les mouvements browniens orthogonaux et symplectiques. Un autre aspect développé dans [34] est l'étude du développement en puissance de  $\frac{1}{N}$  de  $\frac{1}{N} \mathbb{E}[\text{Tr}(Z_t^n)]$ . Le coefficient de la puissance  $\frac{1}{N^g}$  de cette décomposition peut être interprété en termes du nombre de façons, à homéomorphisme près, de découper et de recoller  $n$  disques disjoints pour obtenir une surface orientable ou non-orientable de genre  $g$ . Dans le cas du groupe unitaire, n'interviennent dans le développement de  $\mathbb{E}[\text{tr}(U_t^n)]$  que des puissances de  $\frac{1}{N^2}$ , les opérations de recollement autorisées ne font intervenir que des surfaces orientables. Dans cette situation, on peut alors reformuler (voir [34]) cette énumération par le genre à l'aide de revêtements ramifiés sur un disque, qui peuvent s'interpréter comme une intégrale contre l'analogue de la mesure de Yang-Mills avec pour groupe de structure  $\mathfrak{S}_n$ . La marche aléatoire simple par transpositions joue alors le rôle de mouvement brownien.

Une autre façon de comprendre le comportement des valeurs propres d'un mouvement brownien sur un groupe compact est d'étudier l'équation différentielle stochastique qu'elles vérifient. Notons  $C_N = \{(\theta_1, \dots, \theta_N) \in \mathbb{U}^N : \theta_N - 2\pi < \theta_1 < \theta_2 < \dots < \theta_N\}$ .

**Proposition 1.3.5.** *Soit  $(U_t)_{t \geq 0}$  un mouvement brownien unitaire tel que  $U_0$  a pour valeurs propres  $e^{i\zeta_1}, \dots, e^{i\zeta_N}$ , avec  $\zeta \in \overline{C_N}$ . Il existe  $(\theta_t)_{t \geq 0}$  une semi-martingale à valeurs dans  $\overline{C_N}$  et  $N$  mouvements browniens réels, standards  $B_1, \dots, B_N$ , adaptés à la filtration canonique du mouvement brownien unitaire, tels que pour tout  $t \geq 0$ ,  $U_t$  a pour valeurs propres  $\theta_t$  et  $(\theta_t)_{t \geq 0}$  est l'unique processus admettant une modification à trajectoires continues telles que pour tout  $t > 0$ ,  $\theta_t \in C_N$ , qui est solution forte de l'équation différentielle stochastique*

$$d\theta_{p,t} = \frac{1}{\sqrt{N}} dB_{p,t} + \frac{1}{N} \sum_{q \neq p} \cotan\left(\frac{\theta_{p,t} - \theta_{q,t}}{2}\right) dt, \quad 1 \leq p \leq N, \quad (1.21)$$

avec pour condition initiale  $\theta_0 = \zeta$ .

*Preuve.* On montre ici comment obtenir la formule (1.21), si l'on suppose qu'il existe une semi-martingale  $(V_t)_{t \geq 0}$  à valeurs dans  $U(N)$  et une semi-martingale  $(\theta)_{t \geq 0}$  à valeurs dans  $\overline{C_N}$  telle que presque sûrement, pour tout  $t > 0$ ,  $\theta_t \in C_N$  et

$$U_t = \text{Ad}(V_t^{-1})(\exp(i\Theta_t)),$$

où  $\Theta_t$  est la matrice diagonale associée à  $\theta_t$ . On renvoie à [1, 9] pour une preuve de ces propriétés et pour l'unicité forte des solutions. Notons  $(K_t)_{t \geq 0}$  le mouvement brownien sur les matrices anti-hermitiennes, associé au produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  (de sorte que pour tout  $t \geq 0$ ,  $K_t$  a même loi que  $\sqrt{t}iH$ , où  $H$  est une matrice de Wigner). L'équation différentielle stochastique (1.4) définissant le mouvement brownien sur  $U(N)$  est

$$dU_t = U_t dK_t - \frac{1}{2} U_t dt.$$

On fait l'hypothèse que les processus  $(U_t)_{t \geq 0}$ ,  $(V_t)_{t \geq 0}$  et  $(\Theta_t)_{t \geq 0}$  sont adaptés à la filtration canonique de  $(K_t)_{t \geq 0}$ . Alors, une première application de la formule d'Itô pour ces processus à valeurs dans  $M_N(\mathbb{C})$  entraîne que

$$d \exp(i\Theta_t) = \text{Ad}(V_t)(dU_t) + \text{ad}(d(V_t)V_t^{-1})(\exp(i\Theta_t)) \quad (1.22)$$

$$+ \text{ad}(d(V_t)V_t^{-1})(\text{Ad}(V_t)(dU_t)) - d(V_t)V_t^{-1} \exp(i\Theta_t) d(V_t)V_t^{-1}, \quad (1.23)$$

la présence de deux symboles de différentielles stochastiques de semi-martingales dans un produit, tel que ceux apparaissant dans (1.23), signifie ici que l'on considère une variation quadratique. Pour toute matrice diagonale  $D$ ,  $\text{ad}(D) : M_N(\mathbb{C}) \rightarrow \mathfrak{s} = \{X \in M_N(\mathbb{C}) : \forall l, X_{l,l} = 0\}$ . Il s'ensuit que pour tous indices  $l, k \in \{1, \dots, N\}$ ,  $(\text{ad}(d(V_t)V_t^{-1})(\exp(i\Theta_t)))_{l,l} = 0$  et

$$\begin{aligned} d\theta_{l,t}d\theta_{k,t} &= - \left( \text{Ad}(V_t)(U_t^{-1}dU_t) \right)_{l,l} \left( \text{Ad}(V_t)(U_t^{-1}dU_t) \right)_{k,k} \\ &= - (\text{Ad}(V_t)(dK_t))_{l,l} (\text{Ad}(V_t)(dK_t))_{k,k} = \frac{\delta_{k,l}}{N} dt. \end{aligned}$$

En posant pour tout  $t \geq 0$  et tout indice  $p$ ,  $B_{p,t} = \sqrt{N} \int_0^t (\text{Ad}(V_s)(dK_s))_{p,p}$ , on définit une famille de  $N$  mouvements browniens standards indépendants, telle que  $(\theta_t - \frac{1}{\sqrt{N}} B_t)_{t \geq 0}$  est un processus à variation bornée. Pour déterminer ce processus, on utilise à nouveau la partie martingale de l'équation (1.22). Presque sûrement, pour tout  $t > 0$ ,  $\Theta_t \in C_N$  et l'application  $\text{ad}(\exp(i\Theta_t)) : M_N(\mathbb{C}) \rightarrow \mathfrak{s}$  a pour noyau les matrices diagonales et pour  $p \neq q$ ,  $\text{ad}(\exp(i\Theta_t))(E_{p,q}) = (e^{i\theta_{t,p}} - e^{i\theta_{t,q}})E_{p,q}$ . Notons  $\mathfrak{h}$  l'ensemble des matrices diagonales,  $\pi_{\mathfrak{h}}$  et  $\pi_{\mathfrak{s}}$  les projections associées à la décomposition  $M_N(\mathbb{C}) = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{s}$ . Pour tout  $t \geq 0$ ,

$$\pi_{\mathfrak{s}}(d(V_t)V_t^{-1}) = \text{ad}(\exp(i\Theta_t))_{|\mathfrak{s}}^{-1}(\pi_{\mathfrak{s}}(\text{Ad}(V_t)(dU_t))).$$

Remarquons que  $\text{Ad}(V_t)(dU_t) = \exp(i\Theta_t)\text{Ad}(V_t)(U_t^{-1}dU_t)$  et que pour toutes matrices  $X, Y$ ,  $\pi_{\mathfrak{h}}(\text{ad}(X)(Y)) = \pi_{\mathfrak{h}}(\text{ad}(\pi_{\mathfrak{s}}(X))(\pi_{\mathfrak{s}}(Y)))$ . La variation quadratique  $\pi_{\mathfrak{h}}(\text{ad}(d(V_t)V_t^{-1})(\text{Ad}(V_t)(dU_t)))$  peut donc se reformuler comme l'image par  $\pi_{\mathfrak{h}}$  de

$$\begin{aligned} &\text{ad} \left( \text{ad}(\exp(i\Theta_t))_{|\mathfrak{s}}^{-1}(\pi_{\mathfrak{s}}(\exp(i\Theta_t)\text{Ad}(V_t)(U_t^{-1}dU_t))) \right) \left( \pi_{\mathfrak{s}}(\exp(i\Theta_t)\text{Ad}(V_t)(U_t^{-1}dU_t)) \right) \\ &= \text{ad} \left( \text{ad}(\exp(i\Theta_t))_{|\mathfrak{s}}^{-1}(\pi_{\mathfrak{s}}(\exp(i\Theta_t)dK_t)) \right) (\pi_{\mathfrak{s}}(\exp(i\Theta_t)dK_t)) \\ &= \frac{1}{N} \sum_{p < q} \frac{e^{i(\theta_{p,t} + \theta_{q,t})}}{e^{i\theta_{p,t}} - e^{i\theta_{q,t}}} (E_{p,p} - E_{q,q}) dt = \frac{1}{N} \sum_{p \neq q} \cotan \left( \frac{\theta_{p,t} - \theta_{q,t}}{2} \right) i e^{i\theta_{p,t}} E_{p,p}. \end{aligned}$$

Le fait que les matrices  $(V_t)_{t \geq 0}$  soient unitaires montre que pour tout indice  $l \in \{1, \dots, N\}$ , pour tout  $t \geq 0$ ,  $R_t = \int_0^t (\exp(-i\Theta_s)d(V_s)V_s^{-1} \exp(i\Theta_s)d(V_s)V_s^{-1})_{l,l}$  est à valeurs réelles tandis que  $\theta_{t,l} - R_t$  est à valeurs imaginaires pures. On en déduit que  $R_t = 0$  et que l'équation (1.21) est satisfaite.  $\square$

Heuristiquement, on peut penser aux valeurs propres d'un mouvement brownien unitaire comme à des particules électriques browniennes de même charge, contraintes à rester sur le cercle unité.



### 1.3.2 Résultats de fluctuation

La Proposition 1.3.5 montre que les valeurs propres d'un mouvement brownien unitaires sont fortement corrélées et beaucoup plus rigides que  $N$  variables indépendantes sur le cercle ; on peut donc s'attendre à ce que les fluctuations de la mesure empirique autour de la limite  $\mu_t$  soient d'un ordre de grandeur plus petit que celui qui serait donné par un théorème central limite classique. Par ailleurs, on s'attend aussi à ce que ces fluctuations soient du même ordre de grandeur que celles de la mesure empirique des valeurs propres d'une matrice unitaire autour de la mesure de Haar. Dans ce cadre, on peut montrer que l'espérance d'un polynôme en les moments de la mesure empirique admet une expression simple.

**Théorème 1.3.6** ([19]). *Notons  $U, G^+$  et  $G^-$  des variables aléatoires distribuées suivant la mesure de Haar sur  $U(N), O(N)$  et  $Sp(2N)$ . Alors si  $a, b \in \mathbb{N}^k$ , pour  $N \geq \sum_{j=1}^k a_j + b_j$ ,*

$$\mathbb{E}[\prod_{j=1}^k \text{Tr}(U^j)^{a_j} \overline{\text{Tr}(U^j)^{b_j}}] = \mathbb{E}[\prod_{j=1}^k Z_j^{a_j} \overline{Z_j}^{b_j}] \quad (1.24)$$

et pour  $N \geq \sum_{j=1}^k a_j$ ,

$$\mathbb{E}[\prod_{j=1}^k \text{Tr}(G^{\pm j})^{a_j}] = \mathbb{E}[\prod_{j=1}^k (X_j \pm \eta_j)^{a_j}], \quad (1.25)$$

où  $\eta_j = 1$  si  $j$  est pair, 0, sinon, et  $(Z_j)_{j \geq 1}, (X_j)_{j \geq 1}$  sont des variables aléatoires indépendantes telles que  $Z_j \sim \mathcal{N}_{\mathbb{C}}(0, j)$  et  $X_j \sim \mathcal{N}_{\mathbb{R}}(0, j)$  pour tout  $j \geq 1$ .

Ce théorème fut démontré par Persi Diaconis et Mehrmad Shashahani en utilisant l'orthogonalité des caractères et la décomposition des produits de fonctions traces en caractères irréductibles. On peut aussi appliquer le théorème 1.1.17.

Si  $e^{i\theta_1}, \dots, e^{i\theta_N}$  sont les valeurs propres d'une matrices unitaires de loi uniforme, le théorème 1.3.6 montre en particulier que pour tout entier  $n$ , la variable aléatoire  $\text{Tr}(U^n) = \sum_{k=1}^N e^{in\theta_k}$  converge en loi vers une gaussienne, les fluctuations sont  $\sqrt{N}$  fois plus petites que celles d'un théorème central limite classique. Si  $\mu_N$  désigne la mesure empirique des valeurs propres d'une matrice uniforme sur  $U(N)$ , pour tout polynômes  $P$ , notons

$$\Delta_N(P) = N(\mu_N - \mu)(P) = \mathbb{E}[\text{Tr}(P(U))] - N \int_{\mathbb{U}} P(z) \mu(dz).$$

D'après le théorème 1.3.6,  $(\Delta_N(P))_{P \in \mathbb{C}[X]}$  converge vers un vecteur gaussien centré  $(\Delta(P))_{P \in \mathbb{C}[X]}$ , tel que

$$\sum_{n, m \geq 0} \text{cov}(\Delta(X^n), \Delta(X^{-m})) \frac{z^n w^m}{nm} = -\log(1 - zw)$$

et

$$\text{cov}(\Delta(X^n), \Delta(X^m)) = 0,$$

si  $n, m \in \mathbb{N}$ . Si  $\mu_N^+$  et  $\mu_N^-$  désignent les mesures empiriques des valeurs propres de matrices uniformes sur  $O(N)$  et  $Sp(2N)$ , notons pour tout polynôme  $P$ ,

$$\Delta_N^{\pm}(P) = N(\mu_N^{\pm} - \mu)(P).$$

Alors les familles  $(\Delta_N^\pm(P))_{P \in \mathbb{C}[X]}$  convergent vers des vecteurs gaussiens tels que pour toute paire d'entiers relatifs  $n, m$

$$\text{cov}(\Delta^\pm(X^n), \Delta^\pm(X^m)) = \text{cov}(\Delta(X^n), \Delta(X^m)) + \text{cov}(\Delta(X^n), \Delta(X^{-m}))$$

et

$$\sum_{n \geq 1} \mathbb{E}[\Delta^\pm(X^n)] z^n = \pm \frac{z^2}{1 - z^2}.$$

Dans les chapitres 3 et 4, on démontre le pendant de ce théorème pour le mouvement brownien sur les mêmes groupes compacts. Pour tout polynôme  $P \in \mathbb{C}[X]$  et  $t \geq 0$ , notons

$$\Delta_{N,t}(P) = N(\mu_{t,N} - \mu_t)(P)$$

et

$$\Delta_{N,t}^\pm(P) = N(\mu_{t,N}^\pm - \mu_t)(P).$$

**Théorème 1.3.7.** *Pour tout  $t \geq 0$ , le vecteur aléatoire  $(\Delta_{N,t}(P))_{P \in \mathbb{C}[X]}$  converge vers un vecteur gaussien centré  $(\Delta_t(P))_{P \in \mathbb{C}[X]}$ , tandis que  $(\Delta_{N,t}^\pm(P))_{P \in \mathbb{R}[X]}$  converge en loi vers un vecteur gaussien  $(\Delta_t^\pm(P))_{P \in \mathbb{R}[X]}$  qui a même loi que  $\left(\pm M_t(P) + \frac{1}{\sqrt{2}}(\Delta_t(P) + \overline{\Delta_t(P)})\right)_{P \in \mathbb{R}[X]}$ , où  $P \in \mathbb{R}[X] \mapsto M_t(P)$  est une fonction déterministe. Ces vecteurs gaussiens sont caractérisés par les séries génératrices suivantes*

$$\sum_{n,m \geq 0} \text{cov}(\Delta_t(X^n), \Delta_t(X^m)) \frac{z^n w^m}{nm} = \log \left( \frac{w e^{t L_t(e^{-\frac{t}{2}} z)} - z e^{t L_t(e^{-\frac{t}{2}} w)}}{w - z} \right),$$

$$\sum_{n,m \geq 0} \text{cov}(\Delta_t(X^n), \Delta_t(X^{-m})) \frac{z^n w^m}{nm} = \log \left( \frac{1 - z w e^{-t(L_t(e^{-\frac{t}{2}} z) + L_t(e^{-\frac{t}{2}} w))}}{1 - z w} \right)$$

et

$$\sum_{n \geq 1} M_t(X^n) z^n = \pm \left( \frac{z^2}{1 - z^2} + R(L_t(e^{-\frac{t}{2}} z), t L_t(e^{-\frac{t}{2}} z)) \right),$$

où  $R \in \mathbb{C}(X, Y)$ , avec  $R(0, 0) = 0$ .

Un résultat analogue a été obtenu par M. Maïda et T. Lévy [36] en se restreignant aux matrices unitaires mais pour une classe de fonctions plus grande que celle des polynômes, constituée des fonctions 1-Lipschitzienne. Le théorème 1.3.7 ouvre cependant la voie à une analyse précise de la forme bilinéaire de covariance de  $\Delta_t$ , qui permettrait d'identifier son domaine à une classe de fonction plus large que les fonctions 1-Lipschitzienne et dépendant de  $t$ . Une première analyse simple des expressions explicites des formes de covariances et de la moyenne  $M_t$  données dans le théorème 1.3.7 montre que les vecteurs gaussiens  $(\Delta_t(P))_{P \in \mathbb{C}[X]}$  et  $(\pm M_t(P) + \frac{1}{\sqrt{2}}(\Delta_t^\pm(P) + \overline{\Delta_t^\pm(P)}))_{P \in \mathbb{R}[X]}$  convergent en loi vers  $(\Delta(P))_{P \in \mathbb{C}[X]}$  et  $(\Delta^\pm(P))_{P \in \mathbb{R}[X]}$ , lorsque  $t \rightarrow \infty$ , ce que l'on peut synthétiser par le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} \Delta_{t,N} & \xrightarrow{N \rightarrow \infty} & \Delta_t \\ t \uparrow \infty \downarrow & & \downarrow t \uparrow \infty \\ \Delta_N & \xrightarrow{N \rightarrow \infty} & \Delta \end{array}.$$

La démonstration que l'on propose au chapitre 3 est indépendante de celle de [36] et repose sur l'étude des cumulants des fonctions traces de polynômes sous la mesure du mouvement brownien.

Notons  $k_n(X_1, \dots, X_n)$  le cumulante de  $n$  variables aléatoires  $X_1, \dots, X_n$ . Soit  $(Z_t)_{t \geq 0}$  un mouvement brownien sur un groupe  $G_N$  appartenant à l'une des trois séries de groupes considérées. Rappelons que  $V_N = \mathbb{C}^N$  si  $G_N$  est orthogonal ou unitaire et  $\mathbb{C}^{2N}$ , si  $G_N$  est symplectique. On notera  $\text{tr} = \frac{1}{\dim(V_N)} \text{Tr}$  la trace normalisée de  $\text{End}(V_N)$ .

**Théorème 1.3.8.** *Soient  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{Z}$ ,  $t \in \mathbb{R}_+^n$ . Pour chacune des trois séries de groupes considérées, la suite  $\dim(V_N)^{2(n-1)} k_n(\text{tr}(G_{t_1}^{\lambda_1}), \dots, \text{tr}(G_{t_n}^{\lambda_n}))$  admet une limite finie quand  $N \rightarrow \infty$ . Les limites associées aux séries orthogonale et symplectique coïncident et on note leur valeur commune  $k_t(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ , tandis que l'on désigne par  $k_t^+(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  la limite associée à la série unitaire. Ces deux quantités sont reliées par l'égalité suivante :*

$$k_t(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \sum_{\varepsilon \in \{-1, 1\}^{n-1}} k_t^+(\varepsilon_1 \lambda_1, \dots, \varepsilon_{n-1} \lambda_{n-1}, \lambda_n). \quad (1.26)$$

L'avantage de cette approche basée sur les cumulants est qu'elle permet simultanément d'étudier des fluctuations d'une autre échelle. Pour simplifier les énoncés, considérons la série des groupes unitaires. On donne au chapitre 3 l'analogie de ces résultats pour les séries orthogonales et symplectiques.

**Théorème 1.3.9.** *Soient  $(A_{N,k})_{1 \leq k \leq n, N \geq 0}$  des suites de matrices déterministes avec  $A_{N,k} \in M_N(\mathbb{C})$  pour tout  $k$ , telles que pour tout mot  $w$  à  $2n$  lettres, la suite  $(\text{tr}(w(A_{N,k}, A_{N,k}^*, 1 \leq k \leq n)))_{N \geq 0}$  admet une limite, quand  $N \rightarrow \infty$ . Alors pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$ ,  $\lambda \in \mathbb{Z}^n$ , la suite  $N^{2(n-1)} k_n(\text{tr}(A_1 U_{t_1}^{\lambda_1}), \dots, \text{tr}(A_n U_{t_n}^{\lambda_n}))$  admet une limite finie quand  $N \rightarrow \infty$ .*

En considérant des suites de matrices de la forme  $\sqrt{N}A$  avec  $A \in M_p(\mathbb{C}) \subset M_N(\mathbb{C})$ , où  $p \in \mathbb{N}$  est fixé, on en déduit le corollaire suivant.

**Corollaire 1.3.10.** *Pour tout  $p \in \mathbb{N}^*$  fixé, la matrice aléatoire  $\sqrt{N}(U_t^n - \int_{\mathbb{U}} z^n \mu_t(dz) \text{Id})_{1 \leq i, j \leq p}$   $\in M_p(\mathbb{C})$  converge en loi vers un vecteur gaussien centré  $\psi_t^+ \in M_p(\mathbb{C})$ .*

Une version analogue de ce résultat a été également obtenue par F. Benaych dans [4] pour les coefficients d'une matrice d'un mouvement brownien unitaire. On peut aussi montrer en considérant la limite  $t \rightarrow \infty$ , l'analogie de ce résultat pour des matrices unitaires distribuées selon la mesure de Haar. Ceci permet de retrouver, comme il est montré dans [4], certains résultats de [15].

### 1.3.3 Probabilités non-commutatives

Un cadre naturel pour reformuler les résultats des deux sections précédentes est donné par la notion d'espace de probabilité non-commutatif d'ordre supérieur. On expose ici brièvement les définitions qui nous sont utiles. On renvoie à [46] et [11] pour plus de détails.

**Définition 1.3.11.** *Un espace de probabilité non-commutatif est la donnée d'une algèbre unitaire  $\mathcal{A}$  munie d'une trace  $\tau$ , telle que  $\tau(\text{Id}) = 1$ . On dit que  $(\mathcal{A}, \tau)$  est étoilé, si cet espace est pourvu d'une involution antilinéaire  $*$ , vérifiant pour tout  $x \in \mathcal{A}$ ,  $\tau(x^*x) \geq 0$ .*

Voici trois exemples d'espaces de probabilités étoilés que l'on a déjà rencontré.

**Exemple 1.3.12.** Si  $(\Omega, \mathbb{P})$  est un espace de probabilité, pour tout entier  $N \in \mathbb{N}^*$ , si  $*$  désigne l'involution usuelle de  $M_N(\mathbb{C})$ ,  $(L^\infty(\Omega, \mathbb{P}) \otimes M_N(\mathbb{C}), *, \mathbb{E} \circ \text{tr})$ .

**Exemple 1.3.13.** Si  $G$  est un groupe quelconque, l'algèbre  $\mathbb{C}[G]$  munie de l'involution  $\sum_{g \in G} \alpha_g g \in \mathbb{C}[G] \mapsto \sum_{g \in G} \overline{\alpha_g} g^{-1}$  et de la trace  $\sum_{g \in G} \alpha_g g \in \mathbb{C}[G] \mapsto \alpha_{\text{Id}}$ .

**Définition 1.3.14.** Si  $(\mathcal{A}, \tau)$  est un espace de probabilité non-commutatif, des sous-algèbres  $(\mathcal{B}_i)_{i \in I}$  de  $\mathcal{A}$  sont dites libres, si pour toute suite  $a_1, \dots, a_{n+1} \in \mathcal{A}$  d'éléments de trace nulle, avec pour chaque  $i$ ,  $a_i \in \mathcal{B}_{l(i)}$  telle que  $l(i) \neq l(i+1)$  si  $i \leq n$ , alors  $\tau(a_1 a_2 \dots a_{n+1}) = 0$ .

**Exemple 1.3.15.** Soit  $F_2$  le groupe libre à deux éléments notés  $a$  et  $b$ , munissons  $\mathbb{C}[F_2]$  de la structure d'espace de probabilités non-commutatif donnée dans l'exemple 1.3.13, les sous-algèbres de  $\mathbb{C}[F_2]$  engendrées respectivement par  $a$  et  $b$  sont libres.

Un élément d'un espace de probabilité non commutatif est appelé une variable aléatoire. Si cet espace est en outre muni d'une involution  $*$  qui en fait un espace étoilé,  $a$  est dite *unitaire* si  $aa^* = a^*a = \text{Id}$ . Si  $(a_i)_{i \in I}$  est une famille de variables aléatoires de l'espace de probabilité  $(\mathcal{A}, \tau)$  alors on appelle distribution des variables  $(a_i)_{i \in I}$  l'espace de probabilités non-commutatif formé des polynômes non-commutatifs à  $I$  variables  $\mathbb{C}\langle X_i \rangle_{i \in I}$ , muni de la trace  $\tau_I$  donnée par  $\tau_I(P(X_i, i \in I)) = \tau(P(a_i, i \in I))$ .

**Exemple 1.3.16.** Si  $u$  est une variable aléatoire non-commutative unitaire, alors il existe une unique mesure de probabilité  $\mu_u$  sur  $\mathbb{U}$  telle que la distribution de  $u$  coïncide avec l'intégration des polynômes contre  $\mu_u$ .

On dit que deux familles de variables aléatoires  $(a_i)_{i \in I}$  et  $(b_j)_{j \in J}$  d'un espace non-commutatif  $(\mathcal{A}, \tau)$  sont libres si les deux sous-algèbres de  $\mathcal{A}$  engendrées respectivement par  $\{a_i, i \in I\}$  et  $\{b_j, j \in J\}$  sont libres. On dit qu'une suite de familles de variables aléatoires  $(a_i^N)_{i \in I, N \geq 0}$  converge en distribution si la suite de traces associée sur  $\mathbb{C}\langle X_i \rangle_{i \in I}$  converge simplement. Si  $(M_i^N)_{i \in I}$  est une suite aléatoire de matrices, on dira que sa distribution converge presque-sûrement si la suite de traces aléatoires sur  $\mathbb{C}\langle X_i \rangle_{i \in I}$ , associée à la trace usuelle normalisée, converge presque-sûrement. Si  $(a_i^N)_{i \in I}$  est une suite de variables aléatoires d'espaces de probabilités étoilés, alors on peut munir l'espace limite  $((a_i)_{i \in I}, \tau_I)$  d'une étoile. Soit  $(G_t^N)_{t \geq 0}$  un mouvement sur un groupe appartenant à l'une des trois séries de groupes considérées ci-dessus, réalisé sur un espace de probabilité  $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$ . Le théorème 1.3.2 montre par exemple que pour tout  $t \geq 0$ , la variable aléatoire  $G_t^N$  de l'espace  $(L^\infty(\Omega, \mathbb{P}) \otimes \text{End}(V_N), \mathbb{E} \circ \text{tr})$  converge en distribution. Le théorème suivant permet d'énoncer un résultat plus général.

**Théorème 1.3.17.** Soient  $(A_i^N)_{i \in I}$  et  $(B_j^N)_{j \in J}$  deux familles indépendantes de matrices aléatoires de  $M_N(\mathbb{C})$  telles que pour tout matrice unitaire  $U \in \text{U}(N)$ ,  $(UB_j U^{-1})_{j \in J}$  a même loi que  $(B_j)_{j \in J}$  et telle que chacune des deux suites de distributions aléatoires converge presque-sûrement. Alors la distribution non-commutative jointe de  $(A_i^N)_{i \in I}$  et  $(B_j^N)_{j \in J}$  converge vers celle de deux distributions libres.

**Définition 1.3.18.** Une famille  $(u_t)_{t \geq 0}$  de variables aléatoires unitaires d'un même espace de probabilité non-commutatif étoilé est appelé mouvement brownien unitaire libre si pour tout  $0 \leq s < t$ ,  $u_s^* u_t$  a la même distribution que  $\mu_{t-s}$  et si pour tout  $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n$ , les variables aléatoires non-commutatives  $u_{t_1}, u_{t_1}^* u_{t_2}, \dots, u_{t_{n-1}}^* u_{t_n}$  sont libres.

Soit  $(G_t^N)_{t \geq 0}$  un mouvement sur un groupe appartenant à l'une des trois séries considérées réalisé sur un espace de probabilité  $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$ . Une version analogue du théorème 1.3.17 pour les groupes orthogonaux et symplectiques permet de montrer à partir de 1.3.2 le résultat suivant.

**Théorème 1.3.19** ([5, 56, 35]). *La famille  $(G_t^N)_{t \geq 0}$  de variables aléatoires sur l'espace de probabilité non-commutatif  $(L^\infty(\Omega, \mathbb{P}) \otimes \text{End}(V_N), *, \mathbb{E} \circ \text{tr})$  converge en distribution vers un mouvement brownien libre.*

Pour donner un cadre commun aux résultats de fluctuations analogues à ceux de la section 1.3.2, la notion d'espace de probabilité non-commutatif a été généralisée par J. Mingo, R. Speicher, Nica, B. Collins et P. Śniady dans une série d'articles [45, 44, 11].

**Définition 1.3.20.** *Un espace de probabilité non-commutatif étoilé d'ordre supérieur est la donnée d'une algèbre unitaire  $\mathcal{A}$  (pourvue d'une involution) et d'une suite  $(\varphi_n)_{n \geq 1}$  de formes multilinéaires symétriques  $\varphi_n : \mathcal{A} \times \dots \times \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C}$  qui sont traciales en chaque variable, telle que pour tout  $x \in \mathcal{A}$ ,  $\varphi_1(x^*x) \geq 0$ ,  $\varphi_1(\text{Id}) = 1$  et pour  $n \geq 2$ ,  $\varphi_n(\text{Id}, a_2, \dots, a_n) = 0$ , pour tout  $a_2, \dots, a_n \in \mathcal{A}$ .*

**Exemple 1.3.21.** *Si  $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$  est un espace de probabilités et  $k_n$  désigne les cumulants classiques, alors l'espace de probabilité non-commutatif étoilé  $(L^\infty(\Omega, \mathbb{P}) \otimes \text{End}(V_N), *, \text{tr})$  complété par les applications  $\varphi_n : (M_1, \dots, M_n) \mapsto \dim(V_N)^{2(n-1)} k_n(\text{tr}(M_1), \dots, \text{tr}(M_n))$  forme un espace de probabilité non-commutatif d'ordre supérieur.*

De même que pour un espace de probabilité non-commutatif, on définit la notion de distribution non-commutative d'ordre supérieur et celle de convergence en distribution d'ordre supérieur. Le théorème 1.3.8 peut être reformulé ainsi. La famille de variables aléatoires  $(Z_t^N)_{t \geq 0}$  de l'espace  $(L^\infty(\Omega, \mathbb{P}) \otimes \text{End}(V_N), *, (\varphi_n)_{n \geq 1})$  converge en distribution non-commutative d'ordre supérieur. Dans [11] et [48] est également définie une notion de liberté d'ordre supérieure telle qu'un analogue du théorème 1.3.17 soit satisfait. Bien que cela ne soit pas développé dans ce mémoire, mentionnons que l'on peut également définir un mouvement brownien unitaire libre d'ordre supérieur en calquant la définition 1.3.18. Le théorème 1.3.8 complété par l'analogue du théorème 1.3.17 montre l'existence d'un tel processus.

### 1.3.4 Champ maître, champs maîtres gaussiens, champs maîtres à tout ordre

Au vu des deux sections précédentes, des observables adaptées à la limite  $\dim(G) \rightarrow \infty$  sont les boucles de Wilson renormalisées : c'est-à-dire les fonctions  $h \in \mathcal{M}(\mathcal{P}(\mathbb{R}^2)) \mapsto \text{tr}(h_l)$ , avec  $l \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ . Soit  $(G_N)_{N \geq 0}$  l'une des trois séries de groupes compacts orthogonale, symplectique ou unitaire. On peut en effet montrer les résultats suivants.

**Théorème 1.3.22** ([35]). *Sous  $\text{YM}^{G_N}$ , le vecteur aléatoire  $(\text{tr}(H_l))_{l \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)}$  converge en probabilité vers un vecteur déterministe  $(\Phi(l))_{l \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)}$ , avec  $\Phi : \mathcal{L}(\mathbb{R}^2) \rightarrow [-1, 1]$  continue en 1-variation pour les lacets à base fixée.*

Une question naturelle est alors de déterminer les fluctuations autour de cette convergence. Pour montrer un tel résultat, on montre que l'on peut généraliser les techniques utilisées dans [35] pour montrer la convergence des cumulants des boucles de Wilson convenablement normalisées. Il s'avère que les résultats obtenus pour un mouvement brownien se généralisent pour des mots en plusieurs mouvements browniens indépendants. Ceux-ci peuvent alors être interprétés à l'aide

de la mesure de Yang-Mills. On montre dans les chapitre 3 et 4 qu'ils permettent d'obtenir les informations asymptotiques suivantes sur les boucles de Wilson de tous les lacets de longueur finie.

**Théorème 1.3.23.** *Sous  $\text{YM}^{U(N)}$ , le vecteur aléatoire  $(\text{Tr}(H_l))_{l \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)}$  converge en probabilité vers un vecteur gaussien  $(\phi_l)_{l \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)}$ , tel que si une suite de lacets  $l_n \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$  converge en 1-variation vers  $l \in \mathcal{L}_x(\mathbb{R}^2)$ , alors  $\phi_{l_n}$  converge en loi vers  $\phi_l$ . Il existe une fonction  $\mathbf{m} : \mathcal{L}(\mathbb{R}^2) \rightarrow \mathbb{R}$  continue en 1-variation pour les lacets à base fixée, telle que sous  $\text{YM}^{O(N)}$  et respectivement sous  $\text{YM}^{\text{Sp}(2N)}$ , le vecteur aléatoire  $(\text{Tr}(H_l))_{l \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)}$  converge en probabilité vers les vecteurs gaussiens  $(\mathbf{m}(l) + \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_l + \phi_{l^{-1}}))_{l \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)}$  et  $(-\mathbf{m}(l) + \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_l + \phi_{l^{-1}}))_{l \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)}$ .*

On montre ce théorème dans les chapitre 3 et 4, en étudiant le comportement des cumulants des boucles de Wilson.

**Théorème 1.3.24.** *Pour tout ensemble de lacets  $\mathcal{S} = \{l_1, \dots, l_n\}$ , la suite de cumulants  $N^{2(n-1)} k_n^{\text{YM}^{U(N)}}(\text{tr}(H_{l_1}), \dots, \text{tr}(H_{l_n}))$  converge quand  $N \rightarrow \infty$  vers  $\Phi(\mathcal{S}) \in \mathbb{R}$  et la fonction  $(l_1, \dots, l_n) \in \mathcal{L}_x(\mathbb{R}^2)^n \mapsto \Phi^+(\{l_1, \dots, l_n\})$  est continue en 1-variation, en chaque variable. Les suites de cumulants  $N^{2(n-1)} k_n^{\text{YM}^{O(N)}}(\text{tr}(H_{l_1}), \dots, \text{tr}(H_{l_n}))$  et  $(2N)^{2(n-1)} k_n^{\text{YM}^{\text{Sp}(2N)}}(\text{tr}(H_{l_1}), \dots, \text{tr}(H_{l_n}))$  ont pour limite commune, quand  $N \rightarrow \infty$ ,*

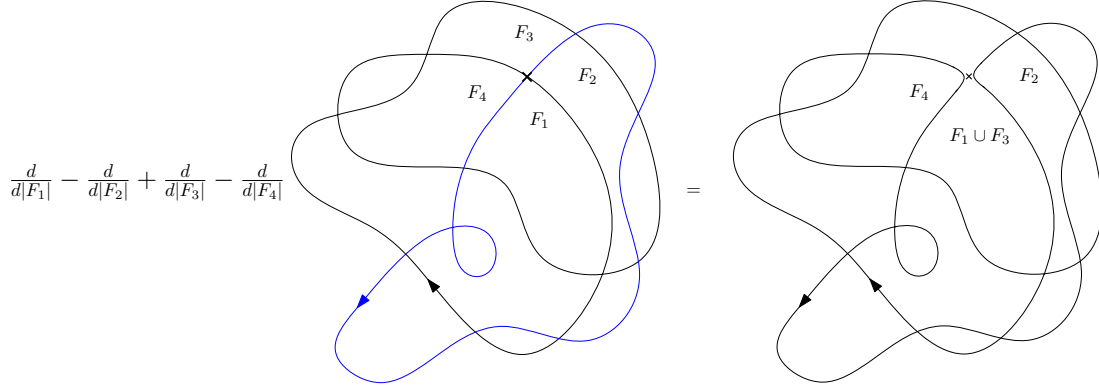
$$\Phi^{\text{n.o.}}(\mathcal{S}) = \sum_{\varepsilon \in \{-1, 1\}^{n-1}} \Phi(\{l_1^{\varepsilon_1}, \dots, l_{n-1}^{\varepsilon_{n-1}}, l_n\}).$$

La fonction  $\Phi : \mathcal{L}(\mathbb{R}^2) \rightarrow [-1, 1]$  porte le nom de *champ maître planaire*, on appelle le vecteur gaussien  $(\phi_l)_{l \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)}$  *champ maître gaussien* et les fonctions  $\Phi, \Phi^{\text{n.o.}} : \bigsqcup_n \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)^n \rightarrow \mathbb{R}$  *champ maître orienté* et *non-orienté*. Le champ maître planaire a été introduit dans la littérature physique [32, 33, 25, 24, 26] suite au travaux de t'Hooft sur le modèle standard [53]. Le texte mathématique de I. Singer [52] énonce de façon informelle un résultat analogue au théorème 1.3.22 et formule de nombreuses conjectures. Il a également été étudié par M. Anshelevich et A.N. Sengupta dans [2] en utilisant la construction d' A.N. Sengupta de la mesure de Yang-Mills.

Une propriété remarquable du champ maître planaire orienté est qu'il garde une trace de la mesure de Yang-Mills avec pour groupe de structure  $U(1)$ . Ceci nous permet en particulier de montrer dans la section 3.3.7 du chapitre 3 que lorsque  $\alpha \rightarrow 0$ , le changement d'échelle du champ maître gaussien  $(\frac{1}{\sqrt{\alpha}} \phi_{\alpha l})_{l \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)}$  converge en loi vers  $i(W(n_l))_{l \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)}$ , où  $W$  désigne un bruit blanc sur  $\mathbb{R}^2$ , muni de la mesure de Lebesgue et  $n_l$  est la fonction indice du lacet  $l$ .

Une autre propriété remarquable du champ maître planaire orienté est qu'il peut être calculé récursivement sur les lacets ayant un nombre fini d'intersections simples grâce aux équations différentielles suivantes appelées *équations de Makeenko-Migdal*. Si  $l \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$  est tracé dans un graphe plongé  $\mathbb{G}$ , considérons  $\Phi(l)$  comme une fonction des aires des faces de  $\mathbb{G}$ . Soient  $F_1, F_2, F_3, F_4$  quatre faces de  $\mathbb{G}$  qui s'intersectent en un point d'intersection  $x$  de  $l$  et cycliquement ordonnées, telles que  $F_1$  est bordée par les deux arêtes sortantes de  $x$ , et  $l_g$  et  $l_d$  les deux lacets que l'on obtient en changeant de direction au temps de retour en  $x$  lors du parcours de  $l$ . Alors

$$\left( \frac{d}{d|F_1|} - \frac{d}{d|F_2|} + \frac{d}{d|F_3|} - \frac{d}{d|F_4|} \right) \Phi(l) = \Phi(l_g) \Phi(l_d), \quad (\text{MM})$$

FIGURE 1.4 – Exemple d'une relation  $MM'_2$ .

où, lorsque l'une des faces est la face infinie, on remplace la dérivation correspondante par 0. Les deux physiciens éponymes de ces équations les ont introduites dans [41], en utilisant une formule d'intégration par partie en dérivant la densité de la mesure de Yang-Mills par rapport à une mesure formelle invariante par translations sur les connexions du fibré  $p : \mathbb{R}^2 \times G \rightarrow \mathbb{R}^2$ , analogue à la mesure de Haar. Une telle mesure n'existant pas, leur argument appelle une preuve rigoureuse. T. Lévy donne une preuve et une généralisation de (MM), en effectuant des intégrations par parties successives, en dérivant la densité de la mesure de Yang-Mills discrète  $YM^{\mathbb{G}}$  par rapport à la mesure de Haar sur  $\mathcal{M}(P(\mathbb{G}), G)$ . On donne au chapitre 2 une preuve différente de cette égalité pour le groupe unitaire en exploitant une décomposition adaptée de  $l$  en lassos.

On montre en outre que cette relation se généralise au champ maître d'ordre supérieur. Si  $l_2, \dots, l_n \in L(\mathbb{R}^2)$  sont des lacets qui ne s'intersectent qu'un nombre fini de fois entre eux et avec  $l$ , alors

$$\left( \frac{d}{d|F_1|} - \frac{d}{d|F_2|} + \frac{d}{d|F_3|} - \frac{d}{d|F_4|} \right) \Phi(l, l_2, \dots, l_n) = \sum \Phi(\mathcal{S}_g) \Phi(\mathcal{S}_d), \quad (MM_{n+1})$$

où la somme a lieu sur les partitions de  $\{l_g, l_d, l_2, \dots, l_n\}$  en deux blocs  $\mathcal{S}_g$  et  $\mathcal{S}_d$ , l'un contenant  $l_g$ , l'autre  $l_d$ , la même convention que pour (MM) étant adoptée lorsqu'une face est infinie. En outre, des relations d'un deuxième type sont vérifiées. Si les bords de  $F_1, F_2, F_3, F_4$  s'intersectent en un point d'intersection  $x$  des lacets  $l_1$  et  $l_2$ . Soit  $l$  le lacet obtenu en changeant de brin au point d'intersection  $x$  lors du parcours de  $l_1$ . Alors

$$\left( \frac{d}{d|F_1|} - \frac{d}{d|F_2|} + \frac{d}{d|F_3|} - \frac{d}{d|F_4|} \right) \Phi(l_1, l_2, \dots, l_n) = \Phi(l, l_3, \dots, l_n). \quad (MM'_n)$$

On montre en outre, en généralisant un résultat de [35], que pour tout  $n \geq 0$ , il existe une unique application  $\Phi : \bigsqcup_{1 \leq k \leq n} L(\mathbb{R}^2)^k \rightarrow \mathbb{R}$  telle que

1.  $\Phi$  est continue pour la topologie de la 1-variation, pour des familles de lacets basés en un même point.
2.  $\Phi$  est invariante par les difféomorphismes qui préservent l'aire.
3.  $\Phi(cst) = 1$  et pour tout lacet  $l_2, \dots, l_k$ ,  $\Phi(cst, l_2, \dots, l_k) = 0$ .

4. Si  $\mathcal{S}_1$  et  $\mathcal{S}_2$  sont deux enchevêtrements avec  $|\mathcal{S}_1| + |\mathcal{S}_2| \leq n$ , séparés par une courbe de Jordan, alors  $\Phi(\mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2) = 0$ .
5. Pour toute famille  $\mathcal{S}$  de moins de  $n$  lacets tracés dans un graphe plongé  $\mathbb{G}$ , si  $F$  est une face bornée, bordée par un élément de  $\mathcal{S}$  et voisine de la face infinie, alors

$$\frac{d}{d|F|}\Phi(\mathcal{S}) = -\frac{1}{2}\Phi(\mathcal{S}).$$

6.  $\Phi$  vérifie les équations  $(\text{MM}_k)$  et  $(\text{MM}'_k)$  pour tout  $k \leq n$ .

Pour conclure cette introduction, mentionnons un résultat dû à T. Lévy (voir Lemme 5.20 de [35]) et quelques questions qu'il soulève. Si  $l_1, \dots, l_n \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$  sont équivalents pour la relation de réduction  $\sim$  (définie à la section 1.2.3) à  $l'_1, \dots, l'_n$ , alors pour tout groupe de Lie compact  $G$ , sous  $\text{YM}^G$ ,  $(H_{l_i})_{1 \leq i \leq n}$  a même loi que  $(H_{l'_i})_{1 \leq i \leq n}$ . On en déduit que pour deux telles familles de lacets,  $\Phi(\{l_1, \dots, l_n\}) = \Phi(\{l'_1, \dots, l'_n\})$ . Le champ maître planaire orienté donne à l'algèbre  $\mathbb{C}[\text{RL}_0(\mathbb{R}^2)]$  munie de l'involution antilinéaire  $*$  telle que  $*(l) = l^{-1}$ , une structure d'espace de probabilité d'ordre supérieur. Beaucoup de questions se posent dès lors que l'on veut classifier de telles structures. L'application  $\Phi$  est-elle extrémale parmi les états sur  $\mathbb{C}[\text{RL}_0(\mathbb{R}^2)]$ ? Peut-on classifier les états invariants par difféomorphismes préservant l'aire? Quelle classe de processus de Lévy unitaires libres peut fournir des exemples d'états extrémaux de  $\mathbb{C}[\text{RL}(\mathbb{R}^2)]$ ?





## Chapitre 2

# Integration formulas for Brownian motion on classical compact Lie groups

Combinatorial formulas for the moments of the Brownian motion on classical compact Lie groups are obtained. These expressions are deformations of formulas of B.Collins and P.Śniady for moments of the Haar measure.

### 2.1 Introduction

Let  $G$  be a compact group that belongs to one of the classical series  $U(N)$ ,  $O(N)$  and  $Sp(N)$ . For any of these groups, let us denote by  $V$  their fundamental representation, that is  $\mathbb{C}^N$  for  $U(N)$  and  $O(N)$ , and  $\mathbb{C}^{2N}$  for  $Sp(N)$ . In the following, we are concerned in finding an explicit expression for

$$\int_G f(g)\mu(dg) \tag{2.1}$$

where  $f$  is the composition of a polynomial function on  $\text{End}(V)$  with the fundamental representation and  $\mu$  is the measure associated to the law of a Brownian motion that we shall define in Section 2.4.2. When  $\mu$  is the Haar measure, such quantities have been studied by B. Collins in [10] and later with P. Śniady in [14], see also [13] and [57] for a recent point of view. The subject of this article is to give formulas for (2.1) that are deformations of the ones obtained in [14]. Besides, our work completes the article [34] of T. Lévy who computes such integrals but for a smaller class of polynomials.

Our computations are motivated by the fact that the law of the Brownian motion is invariant by conjugation so that integrating with respect to it defines invariant quantities for the group  $G$ . For any space  $E$  on which  $G$  acts, we will denote by  $E^G$  the set of points in  $E$  fixed by the action of  $G$ . If  $W$  is a representation of  $G$ , we denote by  $\text{End}_G(W)$  the space of endomorphisms commuting with  $G$ . We will consider here the representations  $W = V^{\otimes n} \otimes V^{*\otimes m}$ . For such representations,  $W^G$  is described by the first theorem of invariant theory and  $\text{End}_G(W)$  by the Schur-Weyl duality (see [23]). For instance, for  $G = U(N)$ ,  $\text{End}_G(V^{\otimes n})$  is the image of  $\mathbb{C}[\mathfrak{S}_n]$  by the classical representation on  $V^{\otimes n}$  given by permutation of the tensors. These two equivalent

facts are the main tool used in [14], [57] and [13]. The proof we give here is purely combinatorial and do not rely on it.

We shall give an expression in terms of a commutative family of elements of  $\mathbb{C}[\mathfrak{S}_n]$  called the Jucys-Murphy elements, whose joint spectrum is explicitly known (see [47]). We will compare this expression with the one obtained in [57] for the Haar measure on  $U(N)$  and  $O(N)$ .

In the first section of this article, we introduce the Brownian motion on the groups considered and state informally our result. In the second Section, we shall give a proof of an integration formula for the Haar measure on the symplectic group relying on the first fundamental theorem of invariants and recall the formulas for the orthogonal and the unitary groups. In the third Section, we reformulate these expressions in the algebras  $\text{End}_G(V^{\otimes n})$ , state the formulas we want to prove for the Brownian motion in Theorem 2.4.7 and show they are indeed a deformation of the formulas for the Haar measure. In the last Section, we give a proof of Theorem 2.4.7.

## 2.2 Brownian motion on classical compact Lie groups

For any positive integer  $N$ , let us denote by  $V$  the vector space  $\mathbb{C}^N$ , endowed with its canonical hermitian product denoted by  $(\cdot, \cdot)$ . Let  $\beta$  be the canonical  $\mathbb{C}$ -bilinear form on  $V$  and if  $N$  is even let us denote by  $\omega$  the skew-symmetric bilinear form on  $V$  whose matrix in the canonical basis is  $J = \begin{pmatrix} 0 & I_N \\ -I_N & 0 \end{pmatrix}$ . We shall consider the following groups of matrices : the unitary group  $U(N) = \{U \in M_N(\mathbb{C}) : U^*U = \text{Id}\}$ , the orthogonal group  $O(N) = \{O \in M_N(\mathbb{R}) : {}^tOO = \text{Id}\}$  and the unitary symplectic group  $\text{Sp}(N) = \{S \in \text{U}(2N) : {}^tSJS = J\}$ . We shall denote their Lie algebra by small gothic letters :  $\mathfrak{u}(N) = \{X \in M_N(\mathbb{C}) : X + X^* = 0\}$ ,  $\mathfrak{o}(N) = \{X \in M_N(\mathbb{R}) : {}^tX + X = 0\}$  and  $\mathfrak{sp}(N) = \{X \in \mathfrak{u}(2N) : {}^tXJ + JX = 0\}$ . For any  $x, y \in \mathfrak{u}(N)$ , let us define

$$\langle x, y \rangle = -\dim(V)\text{Tr}_V(xy).$$

The restriction of the real bilinear form  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  defines an invariant scalar product on the three series of Lie algebras we are considering. Let  $G$  be one of the above mentioned compact Lie group with Lie algebra  $\mathfrak{g}$ . Let us denote by  $(K_t)_{t \geq 0}$  the classical Brownian motion on the Euclidean space  $(\mathfrak{g}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  that is the unique Gaussian process with covariance given for all  $x, y \in \mathfrak{g}$  and  $t, s \geq 0$ , by

$$\mathbb{E}[\langle x, K_t \rangle \langle y, K_s \rangle] = \min(t, s) \langle x, y \rangle.$$

The quadratic variation  $\langle\langle dK_t, dK_t \rangle\rangle$  is equal to  $Mdt$ , where  $M$  is a constant matrix. Furthermore,  $M$  is invariant by conjugation by  $G$  and is therefore proportional to the identity. We denote by  $C_{\mathfrak{g}}$  the constant such that  $\langle\langle dK_t, dK_t \rangle\rangle = C_{\mathfrak{g}}dt$ . Let  $S$  be an element of the group  $G$  and define  $(G_t)_{t \geq 0}$  as the stochastic process solution of the following stochastic differential equation

$$dG_t = G_t dK_t + \frac{C_{\mathfrak{g}}}{2} G_t dt, G_0 = S.$$

For any bilinear form  $\psi$  preserved by  $G$ , almost surely, for all  $t \geq 0$ ,  $\psi$  is preserved by  $G_t$ . Indeed, for any  $u, v \in V$ , using Itô formula,

$$\begin{aligned} d\psi(G_t u, G_t v) &= \psi(dK_t u, v) + \psi(u, dK_t v) + C_{\mathfrak{g}}\psi(u, v)dt + \langle\langle \psi(dK_t u, dK_t v) \rangle\rangle \\ &= \psi(\langle\langle dK_t dK_t \rangle\rangle u, v) + C_{\mathfrak{g}}\psi(u, v)dt = 0. \end{aligned}$$

The group  $G$  is characterized by the invariance of some bilinear forms, hence, almost surely, the process  $(G_t)_{t \geq 0}$  belongs to  $G$ . This Markovian process is called the *Brownian motion* on  $G$  issued from  $S$ . Let us describe its generator. For any  $x \in \mathfrak{g}$ , let  $\mathcal{L}_x$  be the left-invariant first order differential operator defined by setting for any differentiable function  $f$  and any  $g \in G$ ,

$$\mathcal{L}_x f(g) = \frac{d}{dt} f(g \exp(tx))|_{t=0}.$$

Let  $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$  be the real envelopping algebra of  $\mathfrak{g}$ . The application  $\mathcal{L}$  extends to an isomorphism of associative algebra between  $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$  and the algebra of left-invariant differential operators on  $G$ . Note that for any smooth function  $F$  on  $M_N(\mathbb{C})$ , and any  $x \in \mathfrak{g}$ ,  $M \in G$ ,

$$\mathcal{L}_x \circ \mathcal{L}_x(F)(M) = d_M F(Mx^2) + d_M^2 F(Mx, Mx). \quad (2.2)$$

For any orthonormal basis  $(x_i)_{1 \leq i \leq d}$  of  $\mathfrak{g}$  with respect to the scalar product  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ , let  $c_{\mathfrak{g}} = \sum_{i=1}^d x_i^2 \in \mathcal{U}(\mathfrak{g})$ . The element  $c_{\mathfrak{g}}$  does not depend on the orthonormal basis  $(x_i)_{1 \leq i \leq d}$  and is called the *Casimir* element. The image of the Casimir element  $c_{\mathfrak{g}}$  is called the *Laplacian* and is denoted by  $\Delta_G$  :

$$\Delta_G = \mathcal{L}_{c_{\mathfrak{g}}} = \sum_{i=1}^d \mathcal{L}_{x_i} \circ \mathcal{L}_{x_i}.$$

Note that the image of  $c_{\mathfrak{g}}$  by the classical representation on  $V$  is  $C_{\mathfrak{g}}$ . The Itô formula combined with the equation (2.2) implies that the Brownian motion on  $G$  is the diffusion process with generator  $\frac{1}{2}\Delta_G$ .

Let  $(G_t)_{t \geq 0}$  be a Brownian motion issued from  $\text{Id}$  and  $H$  a random variable distributed according to the Haar measure on  $G$ . Our main result is a combinatorial formula for the moments of the entries of the matrix  $G_t$ . The Theorem 2.4.7 gives, for any  $i_1, \dots, i_n \in \{1, \dots, N\}$ , an expression for  $\mathbb{E}[(G_t)_{i_1, j_1} \cdots (G_t)_{i_n, j_n}]$  that is a deformation of the expression of [14] for  $\mathbb{E}[H_{i_1, j_1} \cdots H_{i_n, j_n}]$ . In order to use the multiplicative nature of Brownian motion, we get a joint expression for the moments of a same order as a morphism  $\mathbb{E}[G_t^{\otimes n}] \in \text{End}(V^{\otimes n})$ .

## 2.3 Integration formulas for the Haar measure

We give here a proof of the integration formula with respect to the Haar measure on the symplectic group  $\text{Sp}(N)$  and recall the formulas for  $\text{U}(N)$  and  $\text{O}(N)$  (a proof for the compact symplectic group is also given in [12]). Let us denote by  $dO, dU$  and  $dS$  the Haar measure on the groups  $\text{U}(N), \text{O}(N)$  and  $\text{Sp}(N)$ . In the following we shall compute the following integral :

$$\int_{\text{Sp}(2N)} S_{i_1, j_1} S_{i_2, j_2} \cdots S_{i_n, j_n} dS. \quad (2.3)$$

Observe that for any  $S \in \text{Sp}(N)$ ,  $\bar{S} = -JSJ$ , therefore we can deduce from our computation formulas for integrals of polynomials in entries of  $S$  and  $\bar{S}$ . Besides, since the Haar measure is invariant by multiplication by  $-\text{Id}$ , this integral is zero for odd  $n$ . We shall therefore assume here that  $n$  is an even integer  $2p$ . Let us define a hermitian scalar product  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  on  $V^{\otimes n}$  extending the termwise product of the canonical hermitian scalar product on  $V$ . The computation of (2.3) relies on the following fact. Let us denote by  $\Phi$  the morphism

$$\Phi = \int_{\text{Sp}(N)} S^{\otimes 2p} dS \in \text{End}(V^{\otimes 2p}).$$

Using invariance of the Haar measure, it is easily seen that  $\Phi$  is an orthogonal projection onto the vector space  $(V^{\otimes 2p})^{\text{Sp}(N)}$ . If  $(e_i)_{1 \leq i \leq 2N}$  denotes the classical basis of  $\mathbb{C}^{2N}$ , then computing (2.3) amounts to computing

$$\langle e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_{2p}}, \Phi(e_{j_1} \otimes \cdots \otimes e_{j_{2p}}) \rangle.$$

Let  $(w_l)_{l \in L}$  be any generating family of  $(V^{\otimes 2p})^{\text{Sp}(N)}$ ,  $\text{Gr} = (\langle w_i, w_j \rangle)_{i,j \in L}$  its Gram matrix and  $\tilde{\text{Gr}}$  a matrix satisfying  $\text{Gr}\tilde{\text{Gr}}\text{Gr} = \text{Gr}$ . The orthogonal projection onto  $(V^{\otimes 2p})^{\text{Sp}(N)}$  can be reformulated as

$$\Phi = \sum_{i,j \in L} \tilde{\text{Gr}}_{i,j} \langle w_j, \cdot \rangle w_i. \quad (2.4)$$

For any pair of operators  $f$  and  $\tilde{f}$  such that  $f\tilde{f}f = f$  and  $\tilde{f}f\tilde{f} = \tilde{f}$ ,  $\tilde{f}$  is called a *pseudo-inverse* of  $f$ . As soon as  $f$  is self-adjoint for a fixed hermitian product, it admits a unique self-adjoint pseudo-inverse.<sup>1</sup>

What is more, the theory of invariants gives an explicit generating family of  $(V^{\otimes 2p})^{\text{Sp}(N)}$ . Let  $\mathcal{M}(2p)$  be the set of pair partitions of  $\{1, \dots, 2p\}$ . Let us denote by  $\pi_0 \in \mathcal{M}(2p)$  the partition  $\{\{1, 2\}, \{3, 4\}, \dots, \{2p-1, 2p\}\}$  and

$$w_{\pi_0} = \sum_{1 \leq i_1, i_2, \dots, i_{2p} \leq N} \left( \prod_{k=1}^p J_{i_{2k-1}, i_{2k}} \right) e_{i_1} \otimes e_{i_2} \otimes \cdots \otimes e_{i_{2p-1}} \otimes e_{i_{2p}}.$$

The element  $w_{\pi_0}$  is fixed by the action of  $\text{Sp}(N)$ . Let us denote by  $\varepsilon : \mathfrak{S}_{2p} \rightarrow \{-1, 1\}$  the signature homomorphism and  $\rho_\varepsilon : \mathfrak{S}_{2p} \rightarrow \text{GL}(V^{\otimes 2p})$  the homomorphism defined by setting for any  $\sigma \in \mathfrak{S}_{2p}$  and  $v_1, \dots, v_{2p} \in V$ ,

$$\rho_\varepsilon(\sigma) \cdot (v_1 \otimes \cdots \otimes v_{2p}) = \varepsilon(\sigma) v_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma^{-1}(2p)}.$$

The stabilizer of  $\pi_0$  under the natural action of  $\mathfrak{S}_{2p}$  on  $\mathcal{M}(2p)$  is called the *hyperoctahedral group*, we denote it by  $\mathcal{H}_p$ . The group  $\mathcal{H}_p$  stabilizes the element  $w_{\pi_0}$  under the action of  $\mathfrak{S}_{2p}$  through  $\rho_\varepsilon$ , therefore for any  $\pi \in \mathcal{M}(2p)$  and  $\sigma \in \mathfrak{S}_{2p}$  such that  $\sigma\pi_0 = \pi$ , the vector

$$w_\pi = \rho_\varepsilon(\sigma) \cdot w_{\pi_0}$$

is well defined. Furthermore, the action of  $\text{Sp}(N)$  on  $V^{\otimes 2p}$  commutes with the one of  $\mathfrak{S}_{2p}$ , therefore for any  $\pi \in \mathcal{M}(2p)$ ,  $w_\pi \in (V^{\otimes 2p})^{\text{Sp}(N)}$ . The first geometric Theorem of invariant theory claims that all invariants are linear combinations of these ones.

**Theorem 2.3.1** ([23], Thm. 5.2.2 ). *The family  $(w_\pi)_{\pi \in \mathcal{M}(2p)}$  generates  $(V^{\otimes 2p})^{\text{Sp}(N)}$ .*

For any pair of partitions  $\pi, \eta$  of  $\{1, \dots, 2p\}$ , let us denote by  $\pi \vee \eta$  the finest partition coarser than  $\pi$  and  $\eta$ . Let  $\#\pi$  the number of blocks of  $\pi$  and for any  $i, j \in \{1, \dots, n\}$ , let us write  $i \sim_\pi j$  if  $i$  and  $j$  belong to the same block of  $\pi$ . For any permutation  $\sigma \in \mathfrak{S}_{2p}$  and any list of  $2p$  integers  $I = (i_1, \dots, i_{2p})$ , let us set

$$\text{inv}_2(\sigma, I) = \#\{k \in \{1, \dots, p\} : i_{\sigma(2k)} < i_{\sigma(2k-1)}\}.$$

---

1. Note that without the hermitian condition and if  $f$  is not invertible, it admits several pseudo-inverse.

**Lemma 2.3.2.** i) For any  $\pi, \eta \in \mathcal{M}(2p)$ ,

$$\langle w_\pi, w_\eta \rangle = (-1)^p (-2N)^{\#\pi \vee \eta}.$$

ii) Let  $\pi$  be an element of  $\mathcal{M}(2p)$ ,  $\sigma \in \mathfrak{S}_{2p}$  such  $\sigma\pi_0 = \pi$  and  $1 \leq i_1, \dots, i_{2p} \leq N$ . If  $i_l = i_k + N \pmod{2N}$ , for all  $l, k$  such that  $l \sim_\pi k$ , then

$$\langle w_\pi, e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_{2p}} \rangle = \varepsilon(\sigma) (-1)^{\text{inv}_2(\sigma, I)},$$

otherwise this term vanishes.

*Proof.* i) For any permutations  $\alpha$  and  $\beta$  such that  $\alpha(\pi_0) = \pi$  and  $\beta(\pi_0) = \eta$ , the above scalar product equals

$$\begin{aligned} & \sum_{\substack{i_1, \dots, i_{2p} \\ j_1, \dots, j_{2p}}} \prod_{k=1}^p J_{i_{2k-1}, i_{2k}} J_{j_{2k-1}, j_{2k}} \langle e_{i_{\alpha^{-1}(1)}} \otimes \dots \otimes e_{i_{\alpha^{-1}(2p)}} \otimes e_{j_{\beta^{-1}(1)}} \otimes \dots \otimes e_{j_{\beta^{-1}(2p)}} \rangle \varepsilon(\alpha\beta) \\ &= \varepsilon(\alpha^{-1}\beta) \sum_{1 \leq i_1, \dots, i_{2p} \leq 2N} \prod_{k=1}^p J_{i_{2k-1}, i_{2k}} J_{i_{\alpha^{-1}\beta(2k-1)}, i_{\alpha^{-1}\beta(2k)}}. \end{aligned}$$

Let us now choose specific permutations  $\alpha$  and  $\beta$ . Let  $\{A, B\}$  be the unique partition of  $\{1, \dots, 2p\}$  into two sets such that its blocks do not contain any block of  $\pi$  and  $\eta$ . Let us choose a pair of permutations  $\alpha$  and  $\beta$  such that  $\alpha(\{1, 3, \dots, 2p-1\}) = A = \beta(\{1, 3, \dots, 2p-1\})$  and  $\alpha(2k-1) = \beta(2k-1)$ , for any  $k \in \{1, \dots, p\}$ . Then the product in the right-hand side of the last equality writes down  $\prod_{k=1}^p J_{i_{2k-1}, i_{2k}} J_{i_{2k-1}, i_{\alpha^{-1}\beta(2k)}}$ . This term is equal to 1 whenever  $i_{\alpha^{-1}\beta(2k)} = i_{2k}$ , for any  $k \in \{1, \dots, p\}$  and vanishes otherwise. Observe further that the number of cycles of  $\alpha^{-1}\beta|_{\{2, 4, \dots, 2p\}}$  is  $\#\pi \vee \eta$ . Therefore the sum is equal to  $(2N)^{\#\pi \vee \eta}$  and  $\varepsilon(\alpha^{-1}\beta) = (-1)^{n + \#\pi \vee \eta}$ .

ii) This second scalar product is equal to  $\varepsilon(\sigma) \prod_{k=1}^p J_{i_{\sigma(2k-1)}, i_{\sigma(2k)}}$ . This equality implies the second assertion.  $\square$

For any  $z \in \mathbb{C}$  and any  $\pi, \eta \in \mathcal{M}(2p)$ , we set

$$\text{Gr}_{\pi, \eta}(z) = z^{\#(\pi \vee \eta)}.$$

Thanks to Lemma 2.3.2, the matrix  $\text{Gr}(-2N)$  is the Gram matrix we were looking for. This matrix is real and symmetric, we denote its pseudo-inverse by  $W(-2N)$ . We shall show<sup>2</sup> later in Lemma 2.4.5 that for any  $z \in \mathbb{C}$ , the matrix  $\text{Gr}(z)$  has a pseudo-inverse that we shall denote by  $W(z)$ . Equation (2.4) and Lemma 2.3.2 yield the following : for  $I = (i_1, \dots, i_{2p})$ ,  $J = (j_1, \dots, j_{2p}) \in \{1, \dots, 2N\}^{2p}$ ,

$$\int_{\text{Sp}(2N)} S_{i_1, j_1} S_{i_2, j_2} \dots S_{i_{2p}, j_{2p}} dS = (-1)^p \sum_{\pi, \eta \in \mathcal{M}(2p)} \langle w_\pi, w_\eta \rangle W_{\pi, \eta}(-2N) \quad (2.5)$$

$$= \sum_{\pi, \eta \in \mathcal{M}(2p)} \varepsilon(\sigma_\pi \sigma_\eta) (-1)^{\text{inv}_2(\sigma_\pi, I) + \text{inv}_2(\sigma_\eta, J) + p} W_{\pi, \eta}(-2N) \quad (2.6)$$

---

2. We shall see an expression of the matrix  $\text{Gr}(z)$  in terms of Jucys-Murphys elements, which shows that  $\text{Gr}(z)$  is diagonalizable so that  $\text{Gr}(z)$  always has a pseudo-inverse. What is more, as pointed out in [57], this expression implies that the family of matrices  $\{\text{Gr}(z), z \in \mathbb{C}\}$  is commutative.

where the sum is over all the partitions  $\pi, \eta$  such that  $i_k = i_l + N \pmod{2N}$  (resp.  $j_k = j_l + N \pmod{2N}$ ) as soon as  $k \sim_\pi l$  (resp.  $k \sim_\eta l$ ) and  $\sigma_\pi$  and  $\sigma_\eta$  are permutations such that  $\sigma_\pi(\pi_0) = \pi$  and  $\sigma_\eta(\pi_0) = \eta$ .

Let us recall the two formulas for integrals on the compact orthogonal group and the unitary group (see [14] for a proof). Let us define  $\mathcal{M}(p, p) = \{\pi \in \mathcal{M}(2p) : \forall i, j \in \{1, \dots, p\}, i \not\sim_\pi j\}$ . We shall see in section 2.4.4 that for any  $z \in \mathbb{C}$ ,  $(\text{Gr}_{\pi, \eta}(z))_{\pi, \eta \in \mathcal{M}(p, p)}$  has a pseudo-inverse that we shall denote  $\text{Wg}(z)$ . For any  $I = (i_1, \dots, i_{2p}), J = (j_1, \dots, j_{2p}) \in \{1, \dots, N\}^{2p}$ ,

$$\int_{\text{O}(N)} O_{i_1, j_1} O_{i_2, j_2} \cdots O_{i_{2p}, j_{2p}} dO = \sum_{\pi, \eta \in \mathcal{M}(2p)} W_{\pi, \eta}(N), \quad (2.7)$$

where the sum is over all the partitions  $\pi, \eta$  such that  $i_k = i_l$  (resp.  $j_k = j_l$ ) as soon as  $k \sim_\pi l$  (resp.  $k \sim_\eta l$ ) and

$$\int_{\text{U}(N)} U_{i_1, j_1} U_{i_2, j_2} \cdots U_{i_p, j_p} \overline{U}_{i_{p+1}, j_{p+1}} \overline{U}_{i_{p+2}, j_{p+2}} \cdots \overline{U}_{i_{2p}, j_{2p}} dU = \sum_{\pi, \eta \in \mathcal{M}(p, p)} \text{Wg}_{\pi, \eta}(N), \quad (2.8)$$

where the sum is over all the partitions  $\pi, \eta \in \mathcal{M}(p, p)$  such that  $i_k = i_l$  (resp.  $j_k = j_l$ ) as soon as  $k \sim_\pi l$  (resp.  $k \sim_\eta l$ ).

## 2.4 Reformulation in the Brauer algebra.

For any measure  $\mu$  that is invariant by adjunction, the endomorphism  $\int_G g^{\otimes n} \mu(dg)$  of  $V^{\otimes n}$  commutes with the action of  $G$ . We shall specify the element of  $\text{End}_G(V^{\otimes n})$  when  $\mu$  is the Haar measure or the law of the Brownian motion. To begin with, let us describe the algebra  $\text{End}_G(V^{\otimes n})$  as  $G$  belongs to one of the classical series of compact Lie groups.

### 2.4.1 Brauer algebra

Let us write  $I_n$  for the vector space with a basis indexed by  $\mathcal{M}(2n)$ . We give  $I_n$  the structure of an algebra as follows. For any  $\pi \in \mathcal{M}(2n)$ , let us define two partitions of  $\{1, 2, \dots, 3n\}$  by setting  $\pi^+ = \{\{1\}, \dots, \{n\}\} \cup (\pi + n)$  and  $\pi^- = \pi \cup \{\{2n+1\}, \dots, \{3n\}\}$ . For any  $\pi, \eta$ , we denote by  $b(\pi, \eta)$  the number of blocks of  $\pi_+ \vee \eta_-$  included in  $\{n+1, \dots, 2n\}$  and  $\pi \circ \eta \in \mathcal{M}(2n)$  the partition obtained from  $\pi_+ \vee \eta_- \cap (\{1, \dots, n\} \cup \{2n+1, \dots, 3n\})$  by shifting by  $\{2n+1, \dots, 3n\}$  to  $\{n+1, \dots, 2n\}$ . We define

$$\pi \cdot \eta = z^{b(\pi, \eta)} \pi \circ \eta.$$

**Lemma 2.4.1.** [23][Thm 4.4] *For any  $z \in \mathbb{C}$ , the bilinear map  $(\pi, \eta) \in I_n^2 \mapsto \pi \cdot \eta$  endows  $I_n$  with a structure of an associative unitary algebra. We denote this algebra  $\mathcal{B}_n(z)$ .*

For any  $\pi \in \mathcal{M}(2n)$ , we shall represent the element  $\pi \in \mathcal{B}_n(z)$  as a diagram with points of  $\{1, \dots, 2n\}$  set on two lines as in the figure 2.1, so that multiplication in  $\mathcal{B}_n(z)$  amounts to concatenation of diagrams weighted by  $z$  powered to the number of inside loops. For any integers  $1 \leq a < b \leq n$ , set

$$\tau_{a,b} = \{\{a, b\}, \{a+n, b+n\}\} \cup \{\{k, k+n\}, k \neq a, b\}$$

and

$$s_{a,b} = \{\{a, b+n\}, \{b, a+n\}\} \cup \{\{k, k+n\}, k \neq a, b\}.$$

These two kinds of partitions generates  $\mathcal{B}_n(z)$  as an algebra.

**Lemma 2.4.2** ([16] § 7). *The algebra  $\mathcal{B}_n(z)$  is isomorphic to the quotient of the free unital associative algebra on  $\{\bar{\tau}_{a,b}, \bar{s}_{a,b} : 1 \leq a < b \leq n\}$  by the two-sided ideal generated by the following relations : for distinct integers  $a, b, c, d$  between 1 and  $n$ ,*

$$\begin{array}{lll} (i) \bar{\tau}_{a,b}^2 = z\bar{\tau}_{a,b}, & (ii) \bar{s}_{a,b}^2 = 1, & (iii) \bar{s}_{a,b}\bar{\tau}_{a,b} = \bar{\tau}_{a,b}, \\ (iv) \bar{\tau}_{a,b}\bar{\tau}_{c,d} = \bar{\tau}_{c,d}\bar{\tau}_{a,b}, & (v) \bar{s}_{a,b}\bar{s}_{c,d} = \bar{s}_{c,d}\bar{s}_{a,b}, & (vi) \bar{s}_{a,b}\bar{\tau}_{c,d} = \bar{\tau}_{c,d}\bar{s}_{a,b}, \\ (vii) \bar{s}_{a,b}\bar{\tau}_{b,c}\bar{s}_{a,b} = \bar{\tau}_{a,c}, & (viii) \bar{s}_{a,b}\bar{s}_{b,c}\bar{s}_{a,b} = \bar{s}_{b,c}\bar{s}_{a,b}\bar{s}_{b,c}, & (ix) \bar{\tau}_{a,b}\bar{\tau}_{b,c} = \bar{s}_{a,c}\bar{\tau}_{b,c}. \end{array}$$

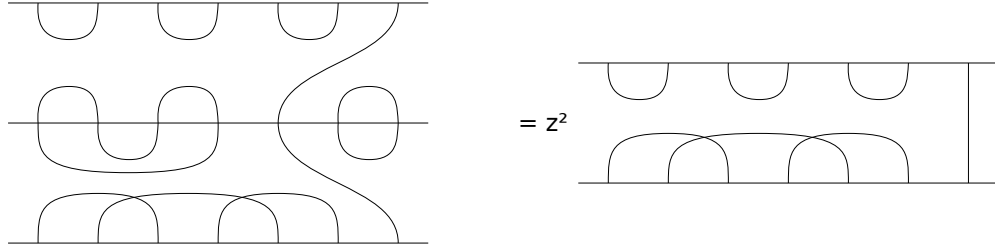


FIGURE 2.1 – Multiplication  $\pi \cdot \eta$  with  $\pi = \{\{1, 2\}, \{3, 4\}, \{5, 14\}, \{6, 7\}, \{8, 9\}, \{10, 11\}, \{12, 13\}\}$  and  $\eta = \{\{1, 3\}, \{25\}, \{4, 6\}, \{7, 12\}, \{8, 11\}, \{9, 10\}, \{13, 14\}\}$ .



FIGURE 2.2 – The two elements  $\tau_{a,b}$  et  $s_{a,b}$  of  $\mathcal{B}_n(z)$ .

Let us describe the standard representations of  $\mathcal{B}_n(N)$  and  $\mathcal{B}_n(-2N)$ . For any  $\pi \in \mathcal{M}(2n)$ , let us define the element of  $\text{End}(V^{\otimes n})$

$$\rho_O(\pi) = \sum E_{i_{n+1}, i_1} \otimes \cdots \otimes E_{i_{2n}, i_n},$$

the sum being over all  $i_1, \dots, i_{2n} \in \{1, \dots, N\}$  such that  $i_k = i_l$  for any  $k, l$  satisfying  $k \sim_\pi l$ . For any  $1 \leq a < b \leq n$ , let us denote by  $\langle a \ b \rangle = \rho_O(\tau_{a,b})$  and  $(a \ b) = \rho_O(s_{a,b})$ .

**Lemma 2.4.3.** *The application  $\rho_O$  extends linearly to an algebra homomorphism from  $\mathcal{B}_n(N)$  to  $\text{End}(V^{\otimes n})$ .*



For any  $1 \leq a < b \leq n$ , let

$$\langle a \ b \rangle_\omega = \sum_{1 \leq i_a, i_{a+n}, i_b, i_{b+n} \leq 2N} J_{i_a, i_b} J_{i_{a+n}, i_{b+n}} \text{Id}^{\otimes a-1} \otimes E_{i_{a+n}, i_a} \otimes \text{Id}^{\otimes b-a-1} \otimes E_{i_{b+n}, i_b} \otimes \text{Id}^{\otimes n-b},$$

$$\rho_S(s_{a,b}) = -(a \ b) \in \text{End}(V^{\otimes n}) \text{ and } \rho_S(\tau) = -\langle a \ b \rangle_\omega.$$

**Lemma 2.4.4.** *The application  $\rho_S$  extends to an algebra homomorphism from  $\mathcal{B}_n(-2N)$  to  $\text{End}(V_{\mathbb{C}}^{\otimes n})$ .*

*Proof.* One checks that the nine relations given in Lemma 2.4.2 are satisfied.  $\square$

### 2.4.2 Expectation of tensors as elements of the Brauer algebra.

We will give here an expression for the orthogonal projection  $\Phi$  of  $V^{\otimes 2p}$  onto  $(V^{\otimes 2p})^{\text{Sp}(2N)}$  as the representation of an element of the Brauer algebra  $\mathcal{B}_{2p}(-2N)$ . Let  $(\sigma_\pi)_{\pi \in \mathcal{M}(2p)}$  be a family of permutations such that  $\sigma_\pi(\pi_0) = \pi$ , and for any  $z \in \mathbb{C}$ , set

$$\mathbf{G}(z) = \sum_{\pi \in \mathcal{M}(2p)} z^{\#(\pi \vee \pi_0)} \sigma_\pi \in \mathbb{C}[\mathfrak{S}_{2p}].$$

Recall that  $\mathcal{H}_p$  is the subgroup of  $\mathfrak{S}_{2p}$  fixing  $\pi_0$ , and let  $\mathcal{P}_{\mathcal{H}_p}$  denote the idempotent  $\frac{1}{2^p p!} \sum_{h \in \mathcal{H}_p} h$ .

**Lemma 2.4.5.** *i) For any  $z \in \mathbb{C}$ ,*

$$\mathcal{P}_{\mathcal{H}_p} \mathbf{G}(z) = \mathbf{G}(z) \mathcal{P}_{\mathcal{H}_p}.$$

*ii) Let  $R_{\text{Gr}(z)} : I_{2p} \rightarrow I_{2p}$ ,  $\sigma \cdot \pi_0 \mapsto \sigma \mathbf{G}(z) \pi_0$ . The endomorphism  $R_{\text{Gr}(z)}$  is well defined, does not depend on the choice of  $(\sigma_\pi)_{\pi \in \mathcal{M}(2p)}$  and its matrix in the canonical basis of  $I_{2p}$  is  $(\text{Gr}_{\mu, \nu}(z))_{\mu, \nu \in \mathcal{M}(2p)}$ .*

*Proof.* i) Indeed, the element  $\mathbf{G}(z) \mathcal{P}_{\mathcal{H}_p} = \frac{1}{2^p p!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{2p}} z^{\#(\sigma \vee \pi_0)} \sigma$  is invariant by multiplication on the left and on the right by  $\mathcal{H}_p$ .

ii) Thanks to the identity of point i), the homomorphism  $R_{\text{Gr}(z)}$  is well define. Besides, it does not depend on the family  $(\sigma_\pi)_{\pi \in \mathcal{M}(2p)}$ . For any  $\eta, \mu \in \mathcal{M}(2p)$ , there is a unique  $\pi \in \mathcal{M}(2p)$  with  $\sigma_\eta \sigma_\pi \pi_0 = \mu$ , what is more  $\nu \vee \mu = \sigma_\eta(\pi_0 \vee \pi)$  and  $\#(\pi \vee \pi_0) = \#(\mu \vee \nu)$ . Hence

$$\sigma_\eta \mathbf{G}(z) \pi_0 = \sum_{\pi \in \mathcal{M}(2p)} z^{\#(\pi \vee \pi_0)} \sigma_\eta \sigma_\pi \pi_0 = \sum_{\mu \in \mathcal{M}(2p)} \text{Gr}(z)_{\mu, \eta} \mu.$$

$\square$

For any integer  $i \geq 2$ , we let

$$X_i = (1 \ i) + (2 \ i) + \cdots + (i-1 \ i)$$

be the  $i$ -th *Jucys-Murphy element*. We set  $X_1 = 0$ . Let us point out the following fact proved in [57].

**Proposition 2.4.1.** [57, Proposition 3] *There exists a family of permutations  $(\sigma_\pi)_{\pi \in \mathcal{M}(2p)}$  such that  $\sigma_\pi(\pi_0) = \pi$  for any  $\pi \in \mathcal{M}(2p)$  and*

$$\mathbf{G}(z) = \prod_{k=1}^p (z + X_{2k-1}).$$

The Jucys-Murphy elements are jointly diagonalizable (see [47]) so that for any  $z \in \mathbb{C}$ , the element  $\mathbf{G}(z)$  has a pseudo-inverse  $\mathbf{W}(z)$  that is a polynomial of  $\mathbf{G}(z)$ . Thus, the element  $\mathbf{W}(z)$  satisfies  $\mathbf{W}(z)\mathcal{P}_{\mathcal{H}_p} = \mathcal{P}_{\mathcal{H}_p}\mathbf{W}(z)$  and it defines an endomorphism  $R_{W(z)}$  which is a pseudo-inverse of  $R_{G(z)}$ . We shall denote by  $W(z)$  its matrix in the canonical basis of  $I_p$ . Besides, observe that for any  $z, z' \in \mathbb{C}$ , the element  $\mathbf{G}(z)\mathbf{G}(z') = \mathbf{G}(z')\mathbf{G}(z)$  induces the endomorphism  $R_{G(z)}R_{G(z')}$ . Hence, the family of matrices  $\{G(z) : z \in \mathbb{C}\}$  is commutative.

We can now give another formulation of the results of the last section. For any  $r, s, n \in \mathbb{N}$  such that  $r \leq s \leq n$  and  $s - r$  is odd, let us set  $\tau_{[r,s]} = \prod_{1 \leq 2i+1 \leq s-r} \tau_{r+2i, r+2i+1} \in \mathcal{B}_n(z)$ .

**Proposition 2.4.2.** *Let  $\mathcal{I}_{2p}(z) = \frac{1}{2^p p!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{2p}} \sigma \mathbf{W}(z) \tau_{[1,2p]} \sigma^{-1}$ ,*

$$\int_{\text{Sp}(2N)} S^{\otimes 2p} dS = \rho_S(\mathcal{I}_{2p}(-2N))$$

and

$$\int_{\text{O}(N)} O^{\otimes 2p} dO = \rho_O(\mathcal{I}_{2p}(N)).$$

*Proof.* Let us prove the first formula for the symplectic group. Let us recall that for any  $\pi \in \mathcal{M}(2p)$ ,  $w_\pi = \rho_S(\sigma_\pi)w_{\pi_0}$  and note that the following equality holds in  $\text{End}(V^{\otimes 2p})$

$$\langle w_\eta, \cdot \rangle w_\pi = (-1)^p \rho_S(\sigma_\pi \tau_{[1,2p]} \sigma_\eta^{-1}).$$

What is more, Lemma 2.3.2 implies

$$\langle w_\pi, w_\eta \rangle = (-1)^p G_{\pi, \eta}(-2N).$$

By definition of the matrix  $W(z)$ ,  $W(z)$  is a pseudo-inverse of  $G(z)$  so that, thanks to formula (2.5), the left-hand-side of the formula of the Proposition equals to

$$\begin{aligned} \sum_{\pi, \eta \in \mathcal{M}(2p)} (-1)^p W_{\pi, \eta}(-2N) \langle w_\eta, \cdot \rangle w_\pi &= (-1)^p \sum_{\eta \in \mathcal{M}(2p)} \langle w_\eta, \cdot \rangle \rho_S(\sigma_\eta \mathbf{W}(-2N)) w_{\pi_0} \\ &= \sum_{\eta \in \mathcal{M}(2p)} \rho_S(\sigma_\eta \mathbf{W}(-2N) \tau_{[1,2p]} \sigma_\eta^{-1}). \end{aligned}$$

Recall that for any  $z \in \mathbb{C}$ ,  $\mathbf{W}(z)\mathcal{P}_{\mathcal{H}_p} = \mathcal{P}_{\mathcal{H}_p}\mathbf{W}(z)$  and note that  $\mathcal{P}_{\mathcal{H}_p} \tau_{[1,2p]} \mathcal{P}_{\mathcal{H}_p} = \tau_{[1,2p]}$ , so that the right-hand side of the last equation equals the right-hand side of the equation of the Proposition.  $\square$

### 2.4.3 Statement of the Theorem for orthogonal and symplectic matrices

We shall now state our main result which extends Proposition 2.4.2 when the integration is not with respect to the Haar measure but with respect to the law of a Brownian motion at a fixed time. We shall denote  $(O_t)_{t \geq 0}$  (resp.  $(S_t)_{t \geq 0}$  and  $(U_t)_{t \geq 0}$ ) the Brownian motion issued from the identity on  $\text{O}(N)$  (resp. on  $\text{Sp}(N)$  and on  $\text{U}(N)$ ). Observe that almost surely the orthogonal Brownian motion takes its value in the connected component of the identity that is the special orthogonal group  $\text{SO}(N) = \{O \in \text{O}(N) : \det(O) = 1\}$ .

For any  $C \subset \{1, \dots, n\}$  and  $z \in \mathbb{C}$ , let us define

$$Z_C(z) = \frac{(1 - z^{-1})|C|}{2} + z^{-1} \sum_{a < b: a, b \in C} s_{a,b} \in \mathcal{B}_n(z)$$

and for  $1 \leq i \leq n$ ,

$$Z_i = Z_{\{1, \dots, i\}}(z).$$

Let us set  $Z_0 = 0$ . For  $t \in \mathbb{R}$  and an integer  $k \geq 2$ , let  $s_t(z_1, \dots, z_k)$  be the symmetric function defined by :

$$s_t(z_1, \dots, z_k) = \prod_{1 \leq i < j \leq k} (z_j - z_i)^{-1} \det \begin{pmatrix} z_1^{k-2} & z_1^{k-3} & \dots & 1 & e^{-tz_1} \\ z_2^{k-2} & z_2^{k-3} & \dots & 1 & e^{-tz_2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ z_k^{k-2} & z_k^{k-3} & \dots & 1 & e^{-tz_k} \end{pmatrix} \quad (2.9)$$

For any integers  $r$  and  $k$ , let us denote by

$$h_r^{(k)}(z_1, \dots, z_k) = \sum_{\substack{l_1, \dots, l_k \geq 0 \\ l_1 + \dots + l_k = r}} z_1^{l_1} \dots z_k^{l_k},$$

the complete symmetric polynomial of degree  $r$ . Let us recall the following classical fact that complete polynomials agree with Schur functions of the partitions  $(r, 0)$ .

**Lemma 2.4.6.** *i) For any integers  $r$  and  $k$ ,*

$$h_r(z_1, \dots, z_k) = \prod_{1 \leq i < j \leq k} (z_j - z_i)^{-1} \det \begin{pmatrix} z_1^{r+k-1} & z_1^{k-2} & z_1^{k-3} & \dots & 1 \\ z_2^{r+k-1} & z_2^{k-2} & z_2^{k-3} & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ z_k^{r+k-1} & z_k^{k-2} & z_k^{k-3} & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

*ii) For any  $t \in \mathbb{R}$ ,*

$$s_t(z_1, \dots, z_{k+1}) = (-1)^k \sum_{r \geq 0} \frac{(-t)^{r+k}}{(r+k)!} h_r(z_1, \dots, z_{k+1}).$$

*iii) For any pairwise distinct non-zero complex numbers  $z_1, \dots, z_k$ ,*

$$s_t(z_1, \dots, z_k, 0) = \prod_{1 \leq i < j \leq k} (z_j - z_i)^{-1} \det \begin{pmatrix} z_1^{k-2} & z_1^{k-3} & \dots & 1 & z_1^{-1}(1 - e^{-tz_1}) \\ z_2^{k-2} & z_2^{k-3} & \dots & 1 & z_2^{-1}(1 - e^{-tz_2}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ z_k^{k-2} & z_k^{k-3} & \dots & 1 & z_k^{-1}(1 - e^{-tz_k}) \end{pmatrix}.$$

*Proof.* i) A proof lies in [40].

ii) Decompose the exponential into its power series. Note that the first  $k - 1$  terms of this sum vanish.

iii) The third point is left to the Reader. □

As a corollary, observe that the function  $s_t$  is well defined on  $\mathbb{C}^k$  and holomorphic. For any integers  $n$  and  $k$ , such that  $0 \leq 2k \leq n$ , let

$$\mathcal{I}_{n,t}^k(z) = \frac{1}{2^k z^k (n-2k)!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \sigma s_t(Z_{n-2k}, Z_{n-2k+2}, \dots, Z_n) \tau_{[n-2k+1, n]} \sigma^{-1}$$

and  $\mathcal{I}_{n,t}(z) = \sum_{0 \leq 2k \leq n} \mathcal{I}_{n,t}^k(z)$ . Our main result is the following pair of formulas.

**Theorem 2.4.7.** *For any  $t \in \mathbb{R}_+$  and  $n \in \mathbb{N}$ ,*

$$\mathbb{E}[O_t^{\otimes n}] = \rho_O(\mathcal{I}_{n,t}(N))$$

and

$$\mathbb{E}[S_t^{\otimes n}] = \rho_S(\mathcal{I}_{n,t}(-2N)).$$

#### 2.4.4 Walled Brauer algebra

For two integers  $n$  and  $m$ , let  $\mathcal{M}(n, m)$  be the set of pair partitions of  $\{1, 2, \dots, 2(n+m)\}$ , which does not connect  $\{1, \dots, n\}$  with  $\{2n+m+1, \dots, 2(n+m)\}$ ,  $\{n+1, \dots, n+m\}$  with  $\{n+m+1, \dots, 2n+m\}$ , nor any of the four blocks  $\{1, \dots, n\}$ ,  $\{n+1, \dots, n+m\}$ ,  $\{n+m+1, \dots, 2n+m+1\}$  and  $\{2n+m+1, \dots, 2(n+m)\}$  with itself. Let us denote by  $\mathcal{B}_{n,m}(z)$  the vector space spanned by  $\mathcal{M}(n, m)$ . Observe that  $\mathcal{B}_{n,m}(z)$  is a subalgebra of  $\mathcal{B}_{n+m}(z)$ .

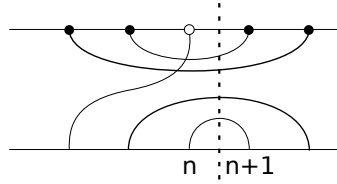


FIGURE 2.3 – An element of  $\mathcal{B}_{n,m}(z)$ .

Let us denote by  $\tilde{\pi}_0 \in \mathcal{M}(n, n)$  the partition  $\{\{1, n+1\}, \dots, \{n, 2n\}\}$ . For any  $\pi \in \mathcal{M}(n, n)$ , let  $\tilde{\sigma}_\pi \in \mathfrak{S}_n$  be the permutation such that  $\tilde{\sigma}_\pi(\tilde{\pi}_0) = \pi$ . For any permutation  $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ , let us write  $\#\sigma$  for the number of cycles of  $\sigma$  and set

$$\Omega(z) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} z^{\#\sigma} \sigma \in \mathbb{C}[\mathfrak{S}_n].$$

For any  $\pi, \eta \in \mathcal{M}(n, n)$ , let us observe that  $\#\sigma_\pi^{-1} \sigma_\eta = \#(\sigma_\pi^{-1} \sigma_\eta \times \text{Id}_n(\tilde{\pi}_0) \vee \tilde{\pi}_0) = \#\pi \vee \eta$ , hence

$$\text{Gr}(z)_{\pi, \eta} = \Omega(z)(\sigma_\pi^{-1} \sigma_\eta). \quad (2.10)$$

The following formula was first proved in [31].

**Proposition 2.4.3.** [57, Prop. 1] *For any  $z \in \mathbb{C}$ ,*

$$\Omega(z) = \prod_{i=1}^n (z + X_i).$$

From this expression, it follows that for any  $z \in \mathbb{C}$ ,  $\Omega(z)$  has a pseudo-inverse  $\mathbf{Wg}(z)$  in  $\mathbb{C}[\mathfrak{S}_n]$  that is a polynomial of  $\Omega(z)$ . For any  $\pi, \eta \in \mathcal{M}(n, n)$ , let  $\mathbf{Wg}(z)_{\pi, \eta} = \mathbf{Wg}(\sigma_\pi^{-1} \sigma_\eta)$ . The equation (2.10) implies that the matrix  $(\mathbf{Wg}(z)_{\pi, \eta})_{\pi, \eta \in \mathcal{M}(n, n)}$  is a pseudo-inverse of  $(\text{Gr}(z)_{\pi, \eta})_{\pi, \eta \in \mathcal{M}(n, n)}$ . For  $r, s, n, m \in \mathbb{N}$ , such that  $1 \leq r \leq s \leq n \leq m$ , let

$$\tilde{\tau}_{[r, s]} = \prod_{r \leq k \leq s} \tau_{k, k+n}.$$

We can now give another formulation of expression (2.8).

**Proposition 2.4.4.** *Let  $\mathcal{I}_{n, n}(z) = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n \times \mathfrak{S}_n} \sigma \mathbf{Wg}(z) \tilde{\tau}_{[1, n]} \sigma^{-1} \in \mathcal{B}_{n, n}(z)$ ,*

$$\int_{U(N)} U^{\otimes n} \otimes \bar{U}^{\otimes n} dU = \rho_O(\mathcal{I}_{n, n}(N)).$$

### 2.4.5 Statement of the Theorem for unitary matrices

We shall state the counterpart of Proposition 2.4.4 for the Brownian motion. Let  $n, m$  be two integers such that  $n \leq m$ . Let us denote by  $p^w$  the projection from  $\mathcal{B}_{n+m}(z)$  to  $\mathcal{B}_{n, m}(z)$  such that  $p^w(\pi) = 0$  for any  $\pi \in \mathcal{M}(2(n+m)) \setminus \mathcal{M}(n, m)$ . Set for any  $C \subset \{1, \dots, n+m\}$ ,  $Y_C = p^w(Z_C) + \frac{|C|z^{-1}}{2} \in \mathcal{B}_{n, m}(z)$  and for any  $1 \leq i \leq n$ ,

$$Y_i = Y_{\{1, \dots, i\} \cup \{n+1, \dots, m+i\}}.$$

Let  $Y_0$  be the element  $Y_{\{n+1, \dots, m\}}$  if  $n < m$ , and zero if  $n = m$ . For any integer  $k$  such that  $0 \leq k \leq n$ , let

$$\mathcal{I}_{n, m, t}^k(z) = \frac{1}{z^k(n-k)!(m-k)!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n \times \mathfrak{S}_m} \sigma st(Y_{n-k}, Y_{n-k+1}, \dots, Y_n) \tilde{\tau}_{[n-k+1, n]} \sigma^{-1}$$

and  $\mathcal{I}_{n, m, t}(z) = \sum_{k=0}^n \mathcal{I}_{n, m, t}^k(z)$ . The formula of Proposition 2.4.4 has the following deformation.

**Theorem 2.4.8.** *For any nonnegative integers  $n \leq m$  and  $t \geq 0$ ,*

$$\mathbb{E}[U_t^{\otimes n} \otimes \bar{U}_t^{\otimes m}] = \rho_O(\mathcal{I}_{n, m, t}(N)).$$

### 2.4.6 Limit as time goes to infinity

For any compact connected Lie group, the law at a time  $t$  of the Brownian motion issued from the identity converges to the Haar measure as  $t$  goes to infinity. In this section, we shall deduce formulas of integration against the Haar measure from formulas for the Brownian motion obtained in Theorem 2.4.7. Note that  $O(N)$  is not connected and that the law of a Brownian motion at time  $t$  issued from the identity converges to the Haar measure on  $SO(N)$  as  $t$  goes to infinity. If  $A$  is any matrix of  $O(N) \setminus SO(N)$ , let  $(g_t)_{t \geq 0}$  a Brownian motion on  $O(N)$  whose initial condition  $g_0$  is equal to  $A$  or  $\text{Id}$  with probability  $\frac{1}{2}$ . The law of  $g_t$  converges to the Haar measure as  $t \rightarrow \infty$ . Using the formulas of B. Collins and P. Śniady as quoted in Propositions 2.4.2 and 2.4.4, the convergence of the law of Brownian motion towards the Haar measure yields the first assertion of the following lemma.

**Lemma 2.4.9.** *i) Let  $n, m$  and  $N$  be fixed integers with  $n \leq m$ . Let us set  $\mathcal{I}_n(z) = 0$  if  $n$  is odd and  $\mathcal{I}_{n,m}(z) = 0$  if  $n < m$ . Let  $A \in SO(N)$  such that  $\det(A) = -1$ . As  $t$  goes to infinity,*

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \rho_O(\mathcal{I}_{n,t}(N))(1 + A^{\otimes n}) &\longrightarrow \rho_O(\mathcal{I}_n(N)), \\ \rho_S(\mathcal{I}_{n,t}(-2N)) &\longrightarrow \rho_S(\mathcal{I}_n(-2N)) \end{aligned}$$

and

$$\rho_O(\mathcal{I}_{n,m,t}(N)) \longrightarrow \rho_O(\mathcal{I}_{n,m}(N)).$$

*ii) If  $n - N$  is a non-negative even integer, let*

$$\mathcal{I}'_n(N) = \frac{1}{(2N)^{\frac{n-N}{2}} N!^2} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \sigma \tau_{[N+1,n]} \varepsilon_N Z_{N+2}(N)^{-1} \cdots Z_{n-2}(N)^{-1} Z_n(N)^{-1} \sigma^{-1}.$$

Otherwise, set  $\mathcal{I}'_n(N) = 0$ . For any integers  $n$  and  $N$ , as  $t \rightarrow \infty$ ,

$$\rho_O(\mathcal{I}_{n,t}(N)) \rightarrow \rho_O(\mathcal{I}_n(N) + \mathcal{I}'_n(N)).$$

We shall give here a direct proof of that lemma without using the Propositions 2.4.2 and 2.4.4 and thus get another proof of the formulas for the Haar measure. Besides, this Lemma yields an expression for integration over special orthogonal group. For any vector space  $E$  that is acted on by  $O(N)$  and that is endowed with an invariant scalar product, let us denote by  $E^{\text{SO}(N),\varepsilon}$  the orthogonal complement of  $E^{O(N)}$  in  $E^{\text{SO}(N)}$ . The Lemma implies that the orthogonal projection on  $(V^{\otimes n})^{\text{SO}(N)}$  (resp.  $(V^{\otimes n})^{O(N)}$ ) is  $\rho_O(\mathcal{I}_n(N) + \mathcal{I}'_n(N))$  (resp.  $\rho_O(\mathcal{I}_n(N))$ ), hence the orthogonal projection on  $(V^{\otimes n})^{\text{SO}(N),\varepsilon}$  is  $\rho_O(\mathcal{I}'_n)$ . Furthermore,

$$\int_{\text{SO}(N)} O^{\otimes n} dO = \int_{O(N)} O^{\otimes n} (1 + \det(O)) dO$$

and the orthogonal projection on  $(V^{\otimes n})^{\text{SO}(N),\varepsilon}$  is therefore

$$\int_{O(N)} O^{\otimes n} \det(O) dO = \rho_O(\mathcal{I}'_n(N)). \quad (2.11)$$

*Sketch of a proof of Lemma 2.4.9 :* Let us first give a sketch of a proof for the orthogonal group  $O(N)$ , as  $N$  is large and  $n$  is an even integer  $2p$ . In that case, the elements  $Z_i(N) - Z_j(N)$ , for  $1 \leq i < j \leq 2p$  have inverses in the group algebra  $\mathbb{C}[\mathfrak{S}_{2p}]$  and for any  $i \in \{1, \dots, 2p\}$ , the spectrum of  $\rho_O(Z_i(N))$  is positive. Therefore, as  $t$  goes to infinity, for any  $i \in \{1, \dots, 2p\}$ ,  $\rho_O(e^{-tZ_i(N)}) \rightarrow 0$ . Recall the definition of  $s_t$  given in (2.9), for any  $k \in \{1, \dots, p\}$ ,  $\rho_O(s_t(Z_{2k}(N), Z_{2k+2}(N), \dots, Z_{2p}(N))) \rightarrow 0$  and  $\rho_O(s_t(0, Z_2, Z_4, \dots, Z_{2p})) \rightarrow \rho_O(Z_2(N)^{-1} Z_4(N)^{-1} \cdots Z_{2p}(N)^{-1})$ . Using theorem 2.4.7, we get the following asymptotic formula : as  $t$  goes to infinity,

$$\rho_O(\mathcal{I}_{2p,t}(N)) \rightarrow \frac{1}{2^p} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{2p}} \rho_O(\sigma N^{-p} Z_2(N)^{-1} Z_4(N)^{-1} \cdots Z_{2p}(N)^{-1} \tau_{[1,2p]} \sigma^{-1}).$$

We shall prove that this formula agrees with Proposition 2.4.2. Let  $\mathcal{P}_{\mathcal{H}_{2p}}$  denote the sum  $\frac{1}{2^p p!} \sum_{h \in \mathcal{H}_{2p}} h$ , this relation follows from the following equality

$$p! \mathcal{P}_{\mathcal{H}_{2p}} N^{-p} Z_2^{-1}(N) Z_4^{-1}(N) \cdots Z_{2p}^{-1}(N) \mathcal{P}_{\mathcal{H}_{2p}} = \text{Gr}(N)^{-1} \mathcal{P}_{\mathcal{H}_{2p}}. \quad (2.12)$$

For  $N$  large enough, for any  $i \in \{1, \dots, p\}$ ,  $N + X_{2i-1}$  have an inverse in  $\mathbb{C}[\mathfrak{S}_{2p}]$  and using the factorization formula of Proposition 2.4.1, this equality can be proved inductively (see Lemma 2.4.14 below).  $\square$

Let us now consider the formulas of Theorem 2.4.7 for all  $N$ . We shall use the decomposition of the  $\mathfrak{S}_n$ -module  $V^{\otimes n}$  into irreducible components and the explicit knowledge of the spectrum of Jucys-Murphy elements. Let us recall some classical notations. A partition of an integer  $n$  is a non-increasing sequence of integers  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots)$  such that  $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots = n$ . We shall write  $\lambda \vdash n$ . If  $\lambda$  is a partition, we denote the number of its non-zero terms by  $l(\lambda)$ . The integer  $l(\lambda)$  is called the length of the partition  $\lambda$ . Recall that irreducible representations of  $\mathfrak{S}_n$  are indexed by partitions of the integer  $n$ , whereas finite dimensional irreducible representations of  $\text{GL}_N(\mathbb{C})$  are indexed by partition of length less than  $N$ . For any partition  $\lambda$  such that  $\lambda \vdash n$  (resp.  $l(\lambda) \leq N$ ), let  $(\rho^\lambda, V^\lambda)$  (resp.  $(\rho_\lambda, V_\lambda)$ ) denote the irreducible representation of  $\mathfrak{S}_n$  ( $\text{GL}_N(\mathbb{C})$ ) indexed by  $\lambda$ . We need the following Theorem due to Hermann Weyl :

**Theorem 2.4.10.** [23, Thm 9.1.2] *The  $\text{GL}_N(\mathbb{C}) \times \mathfrak{S}_n$ -module  $V^{\otimes n}$  is multiplicity-free and is isomorphic to*

$$\bigoplus_{\lambda \vdash n: l(\lambda) \leq N} V_\lambda \otimes V^\lambda.$$

Let us now describe the spectrum of Jucys-Murphy elements. For any partition  $\lambda$ , let  $D_\lambda = \{(i, j) \in \mathbb{N}^{*2} : j \leq \lambda_i\}$ . The subset  $D_\lambda$  is called the diagram of  $\lambda$ . For any  $(i, j) \in D_\lambda$ , the integer  $c((i, j)) = j - i$  is called the *content* of  $(i, j)$ . A tableau of a partition  $\lambda \vdash n$  is a bijection  $T : D_\lambda \rightarrow \{1, \dots, n\}$  such that  $T$  is increasing in each variable. For any partition  $\lambda$ , let us write  $\mathcal{T}_\lambda$  the set of tableaux of the partition  $\lambda$ ,  $\mathcal{T}_n = \bigcup_{\lambda \vdash n} \mathcal{T}_\lambda$  and  $\mathcal{T}_{n,N} = \bigcup_{\lambda \vdash n: l(\lambda) \leq N} \mathcal{T}_\lambda$ .

**Theorem 2.4.11** ([47]). *i) For any partition  $\lambda \vdash n$ , there exists a basis  $(e_T)_{T \in \mathcal{T}_\lambda}$  of  $V^\lambda$  that diagonalizes the family  $(\rho^\lambda(X_1), \rho^\lambda(X_2), \dots, \rho^\lambda(X_n))$  such that for any tableau  $T$ ,  $e_T$  has eigenvalue  $(c(T^{-1}(1)), c(T^{-1}(2)), \dots, c(T^{-1}(n)))$ .*

For any partition  $\lambda \vdash n$ , let  $(\mathcal{P}_T)_{T \in \mathcal{T}_\lambda}$  denote the elements of the group algebra<sup>3</sup>  $\mathbb{C}[\mathfrak{S}_n]$  whose image via the canonical isomorphism  $\mathbb{C}[\mathfrak{S}_n] = \bigoplus_{\lambda \vdash n} \text{End}(V_\lambda)$  is the family of projections corresponding to the basis  $(e_T)_{T \in \mathcal{T}_\lambda}$ . Let us denote by  $\mathcal{P}_\lambda = \sum_{T \in \mathcal{T}_\lambda} \mathcal{P}_T$  the projection on the isotypic component  $\lambda$ . Let  $\lambda'$  be the partition such that  $D_{\lambda'} = \{(i, j) \in \mathbb{N}^{*2} : (j, i) \in D_\lambda\}$  and for any tableau  $T \in \mathcal{T}_\lambda$ , let  $T' \in \mathcal{T}_{\lambda'}$  be the tableau symmetric to  $T$ . For any integer  $l$ , let us denote by  $\varepsilon_l \in \mathbb{C}[\mathfrak{S}_l]$  the signature of  $\mathfrak{S}_l$ . The isotypic projection  $\mathcal{P}_{(1^l)}$  is equal to  $\frac{1}{l!} \varepsilon_l$ . For any  $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ , let  $\sigma^\varepsilon$  denote the element of the group algebra  $\varepsilon(\sigma)\sigma \in \mathbb{C}[\mathfrak{S}_n]$  and extend linearly this definition to  $\mathbb{C}[\mathfrak{S}_n]$ . Note that for any  $i \in \{1, \dots, n\}$ ,  $X_i^\varepsilon = -X_i$  and that for any  $\lambda \vdash n$ ,  $\mathcal{P}_\lambda^\varepsilon = \mathcal{P}_{\lambda'}$ . Observe further that for any permutation  $\sigma$ ,  $\rho_S(\sigma) = \rho_O(\sigma^\varepsilon)$ . We can now describe the spectrum of the elements contributing to the formula of Theorem 2.4.7. For any self-adjoint operators  $L$  and  $J$ , let us write  $L \geq J$  whenever the eigenvalues of  $L - J$  are non-negative.

**Lemma 2.4.12.** *Let  $N$  be an integer greater than 1. For any  $i \in \{1, \dots, n\}$ ,  $\rho_O(Y_i(N)) \geq \text{Id}$  and  $\rho_S(Z_i(-2N)) \geq \text{Id}$ . For any  $i \in \{1, \dots, n\} \setminus \{N\}$ ,  $\rho_O(Z_i(N)) \geq \frac{N-1}{2N}$ . For any  $n \geq N$ ,  $\rho_O(Z_N(N)) \geq \rho_O(1 - \frac{1}{N!} \varepsilon_N)$ , whereas  $\varepsilon_N Z_N(N) = 0$ .*

3. Besides, it is also proved in [47] that  $\mathcal{P}_T$  is a polynomial in  $X_1, X_2, \dots, X_n$ . We shall not use this fact.

*Proof.* For any complex  $z$ , let us write

$$zZ_i(z) = \sum_{k=1}^i \left( \frac{z-1}{2} + X_k \right)$$

and

$$zY_i(z) = \sum_{k=1}^i \left( \frac{z}{2} + X_k \right) + \alpha \sum_{k=1}^{m-n+i} \left( \frac{z}{2} + X_k \right) \alpha^{-1},$$

where  $\alpha$  is a permutation of  $\{1, \dots, m+n\}$  such that for any  $k \leq m$ ,  $\alpha(k) = k+n$ . Observe that the two terms of the right-hand side of the last equality commute and can be jointly diagonalized in a basis indexed by pairs of tableaux of partitions of length less than  $N$ . For any  $i \in \{1, \dots, n\}$ , let  $d, r$  (resp.  $r', d'$ ) be two integers such that  $r < 2N$  and  $i = 2Nd + r$  (resp.  $r' < N$  and  $i = Nd' + r'$ ). The smallest eigenvalue of  $\rho_S(Z_i(-2N))$  (resp.  $\rho_O(Z_i(N))$ ) is the one indexed by the tableaux  $T \in \mathcal{T}_{n, 2N}$  (resp.  $\mathcal{T}_{n, N}$ ) such that  $T^{-1}(\{1, \dots, i\})' = D_{((2N)^d, r)}$  (resp.  $D_{(N^{d'}, r')}$ ) that is  $\frac{d(d+1)}{2} + \frac{(2N+2+2d-r)r}{4N}$  (resp.  $\frac{d'(d'-1)}{2} + \frac{(2d'+N-r')r'}{2N}$ ). Note that all these eigenvalues are larger than 1 (resp.  $\frac{1}{2} - \frac{1}{2N}$ ), except the one of  $\rho_O(Z_N(N))$ , which is zero. The second eigenvalue of  $\rho_O(Z_N(N))$  is indexed by the tableaux  $T \in \mathcal{T}_{n, N}$  such that  $T^{-1}(\{1, \dots, N\}) = D_{(2, 1^{N-1})}$  and equals 1. To conclude the proof for the orthogonal group, recall the following fact proved in [47] : for any  $N \leq n$ , if  $\mathfrak{S}_N$  is canonically embedded into  $\mathfrak{S}_n$ , for any  $\mu \vdash N$ ,

$$\mathcal{P}_\mu = \sum_{T \in \mathcal{T}_n : T^{-1}(\{1, \dots, N\}) = D_\mu} \mathcal{P}_T \in \mathbb{C}[\mathfrak{S}_n]. \quad (2.13)$$

The above analysis of the spectrum of  $\rho_O(Z_N(N))$  and equality (2.13) yield the assertion. Let us check the unitary case. For any  $i \in \{1, \dots, n\}$ , let  $d, r, d', r'$ , the integers such that  $r, r' < N$ ,  $i = dN + r$  and  $i + m - n = Nd' + r'$ . The smallest eigenvalue of  $Y_i(N)$  is indexed by pairs of tableaux  $(T_1, T_2) \in \mathcal{T}_{n, N} \times \mathcal{T}_{m, N}$ , such that  $T_1^{-1}(\{1, \dots, i\})' = D_{(N^d, r)}$  and  $T_2^{-1}(\{1, \dots, i\})' = D_{(N^{d'}, r')}$ , that is  $\frac{(d^2+d'^2)}{2} + \frac{r(2d+N-r+1)+r'(2d'+N-r'+1)}{2N}$ . For any  $i \in \{1, \dots, n\}$ , the spectrum of  $\rho_O(Y_i(N))$  satisfies the above inequality.  $\square$

To complete the proof of Lemma 2.4.9, we shall check that for any  $x \in \mathbb{R}_+^{*n}$ ,  $s_t(x) \rightarrow 0$  and  $g_t(x) \rightarrow \prod_{i=1}^n x_i^{-1}$ . Let us denote  $D = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) > 0\}$  and  $P = \bigcup_{1 \leq i < j \leq n} \{z \in \mathbb{C}^n : z_i = z_j\}$ . Note that  $s_t(z) \rightarrow 0$  and  $g_t(z) \rightarrow \prod_{i=1}^n z_i^{-1}$  uniformly on any compact subset of  $D^n \setminus P$ . For any  $z \in D^n \cap P$  with  $z_i = z_j$ , using Cauchy formula in an affine plane including  $z$  and tranverse to  $P$ , implies that the convergence still holds for  $z$ . Let us give another proof. To that purpose, we shall decompose  $s_t$  as a sum of symmetric polynomials as in Lemma 2.4.6.

**Lemma 2.4.13.** *Let  $z_1, \dots, z_k \in \mathbb{C}$  and  $\{y_1, \dots, y_{k+p}\}$  be a multiset whose elements are  $z_1, \dots, z_k$ , such that for  $1 \leq i \leq k$ ,  $z_i$  has multiplicity  $s_i$ .*

*i) For any  $z \in \mathbb{C}^k$ ,*

$$h_r^{(k+p)}(y_1, y_2, \dots, y_{k+p}) = \prod_{i=1}^k \left( \frac{1}{(s_i - 1)!} \frac{\partial^{s_i-1}}{\partial z_i^{s_i-1}} z_i^{s_i-1} \right) h_r(z_1, z_2, \dots, z_k).$$

*ii) For any  $z \in \mathbb{C}^{*k}$  with pairwise distinct entries,  $s_t^{(k+p)}(y_1, y_2, \dots, y_{k+p})$  is equal to*



$$\prod_{i=1}^k \left( \frac{(-1)^{s_i-1}}{(s_i-1)!} \frac{\partial^{s_i-1}}{\partial z_i^{s_i-1}} z_i^{s_i-1} \right) \prod_{1 \leq i < j \leq k} (z_j - z_i)^{-1} \det \begin{pmatrix} z_1^{k-2} & z_1^{k-3} & \dots & 1 & z_1^{-p} e^{-tz_1} \\ z_2^{k-2} & z_2^{k-3} & \dots & 1 & z_2^{-p} e^{-tz_2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ z_k^{k-2} & z_k^{k-3} & \dots & 1 & z_k^{-p} e^{-tz_k} \end{pmatrix}$$

and  $s_t^{(k+p+1)}(y_1, y_2, \dots, y_{k+p}, 0)$  equals

$$\prod_{i=1}^k \left( \frac{(-1)^{s_i-1}}{(s_i-1)!} \frac{\partial^{s_i-1}}{\partial z_i^{s_i-1}} z_i^{s_i-1} \right) \prod_{1 \leq i < j \leq k} (z_j - z_i)^{-1} \det \begin{pmatrix} z_1^{k-2} & z_1^{k-3} & \dots & 1 & z_1^{-p-1}(1 - e^{-tz_1}) \\ z_2^{k-2} & z_2^{k-3} & \dots & 1 & z_2^{-p-1}(1 - e^{-tz_2}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ z_k^{k-2} & z_k^{k-3} & \dots & 1 & z_k^{-p-1}(1 - e^{-tz_k}) \end{pmatrix}.$$

iii) For any  $x \in \mathbb{R}_+^{*k}$ , as  $t \rightarrow \infty$ ,

$$s_t(x_1, \dots, x_k) \rightarrow 0$$

and

$$s_t(x_1, \dots, x_k, 0) \rightarrow \prod_{i=1}^k x_i^{-1}.$$

*Proof.* i) Indeed,

$$\begin{aligned} h_r^{(k+p)}(y_1, y_2, \dots, y_{k+p}) &= \sum_{\substack{l_1, l_2, \dots, l_k \geq 0 \\ l_1 + l_2 + \dots + l_k = r}} \prod_{i=1}^k \binom{l_i + s_i - 1}{s_i - 1} z_1^{l_1} z_2^{l_2} \dots z_k^{l_k} \\ &= \prod_{i=1}^k \left( \frac{1}{(s_i - 1)!} \frac{\partial^{s_i-1}}{\partial z_i^{s_i-1}} z_i^{s_i-1} \right) h_r^{(k)}(z_1, z_2, \dots, z_k). \end{aligned}$$

ii) The decomposition of  $s_t$  as a sum of complete symmetric polynomials given in ii) of Lemma 2.4.6 and the identity for  $h_r$  proved in i) imply that  $s_t^{(s+k-1)}(y_1, y_2, \dots, y_{k+p})$  is equal to

$$\begin{aligned} &(-1)^{k+p-1} \sum_{r \geq 0} \frac{(-t)^{r+k+p-1}}{(r+k+p-1)!} \prod_{i=1}^k \left( \frac{1}{(s_i - 1)!} \frac{\partial^{s_i-1}}{\partial z_i^{s_i-1}} z_i^{s_i-1} \right) h_r(z_1, \dots, z_k) \\ &= \sum_{l \geq k+p-1} \frac{(-t)^l}{l!} \prod_{i=1}^k \left( \frac{(-1)^{s_i-1}}{(s_i - 1)!} \frac{\partial^{s_i-1}}{\partial z_i^{s_i-1}} z_i^{s_i-1} \right) \prod_{1 \leq i < j \leq k} (z_j - z_i)^{-1} \det \begin{pmatrix} z_1^{k-2} & z_1^{k-3} & \dots & 1 & z_1^{l-p} \\ z_2^{k-2} & z_2^{k-3} & \dots & 1 & z_2^{l-p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ z_k^{k-2} & z_k^{k-3} & \dots & 1 & z_k^{l-p} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Note that the terms in the above summand are zero for  $p \leq l \leq k+p-2$ . We claim that they are also zero for  $0 \leq l \leq p-1$ , so that the formula follows. Indeed, for  $0 \leq l \leq p-1$ , the

function derived in the summand is equal to  $z_1^{l-p+s_1} z_2^{l-p+s_2} \dots z_k^{l-p+s_k} s_{((p-l-1)^{k-1}, 0)}(z_1, \dots, z_k)$ , where  $s_{(j^{k-1}, 0)}(z_1, \dots, z_k)$  is the Schur function associated to the diagram  $(j^{k-1}, 0)$ . Recall that

$$s_{(j^{k-1}, 0)}(z_1, \dots, z_k) = \sum_{1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_j \leq k} \frac{(z_1 \dots z_k)^j}{z_{i_1} \dots z_{i_j}}. \text{ Hence, for } l \leq p-1,$$

$$\left( \prod_{i=1}^k \frac{\partial^{s_i-1}}{\partial z_i^{s_i-1}} \right) z_1^{l-p+s_1} z_2^{l-p+s_2} \dots z_k^{l-p+s_k} s_{((p-l-1)^{k-1}, 0)}(z_1, \dots, z_k) \quad (2.14)$$

$$= \sum_{1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_{p-l-1} \leq k} \left( \prod_{i=1}^k \frac{\partial^{s_i-1}}{\partial z_i^{s_i-1}} \right) \frac{z_1^{s_1-1} \dots z_k^{s_k-1}}{z_{i_1} \dots z_{i_{p-l-1}}} = 0. \quad (2.15)$$

The same expansion yields the second formula.

iii) Thanks to the assertion ii),  $s_t(x_1, \dots, x_k)$  and  $s_t(x_1, \dots, x_k, 0) - \prod_{i=1}^k x_i^{-1}$  are rational functions in  $(x, t)$  multiplied by a polynomial in  $(e^{-tx_1}, \dots, e^{-tx_k})$  of valuation greater than 1. This fact yields the two claims.  $\square$

Let us make a slight abuse of notation by denoting for any integer  $i$ , by  $Z_i^{-1}(z)$ , the element of  $\mathbb{C}[\mathfrak{S}_n]$  that is the pseudo-inverse of  $Z_i(z)$ , such that for any partition  $\lambda \vdash n$ ,  $\rho^\lambda(Z_i(z)^{-1})$  is diagonal in the basis  $(e_T)_{T \in \mathcal{T}_\lambda}$ . Let us set for any even integer  $n$ ,

$$\tilde{\mathcal{I}}_n(z) = (2z)^{-\frac{n}{2}} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \sigma \tau_{[1, n]} Z_2(z)^{-1} Z_4(z)^{-1} \dots Z_n(z)^{-1} \sigma^{-1} \quad (2.16)$$

and  $\mathcal{I}_n(z) = 0$ , for any odd  $n$ . Set, as well, for any integers  $n, m$ ,

$$\tilde{\mathcal{I}}_{n, m} = z^{-m} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n \times \mathfrak{S}_m} \rho_O \left( \sigma \tilde{\tau}_{[1, m]} Y_1(z)^{-1} Y_2(z)^{-1} \dots Y_m(z)^{-1} \sigma^{-1} \right), \quad (2.17)$$

if  $n = m$ , and 0 otherwise. Lemma 2.4.6 combined with the Lemma 2.4.12 yields, as  $t \rightarrow \infty$ ,

$$\rho_S(\mathcal{I}_{n, t}(-2N)) \rightarrow \rho_S(\tilde{\mathcal{I}}_n(-2N)) \quad (2.18)$$

and

$$\rho_O(\mathcal{I}_{n, m, t}(N)) \rightarrow \rho_O(\tilde{\mathcal{I}}_{n, m}(N)). \quad (2.19)$$

Let us now consider the element associated to the Brownian motion on  $\text{SO}(N)$ . We shall draw our attention to the non-invertible element  $\rho_O(Z_N(N))$ . Note that whenever  $k \leq N-2$  is such that  $n-k$  is even,  $\tau_{[k+1, n]} \varepsilon_N = 0$ . Therefore, the Lemmas 2.4.12 and 2.4.6 yield that for any  $p \neq \frac{n-N}{2}$ , with  $2p < n$ ,  $\rho_O(\mathcal{I}_{n, t}^p(N)) \rightarrow 0$ , and if  $n = 2p$ ,

$$\rho_O(\mathcal{I}_{n, t}^p(N)) \rightarrow (2N)^{-p} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \rho_O \left( \sigma \tau_{[1, n]} \left( 1 - \frac{1}{N!} \varepsilon_N \right) Z_2(N)^{-1} Z_4(N)^{-1} \dots Z_n(N)^{-1} \sigma^{-1} \right). \quad (2.20)$$

Besides, if  $n - N = 2p$ , then  $N^p N! \rho_O(\mathcal{I}_{n, t}^p(N))$  equals to

$$\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \sigma \left( s_t(0, Z_{N+2}, \dots, Z_{N+2p}) \frac{1}{N!} \varepsilon_N + s_t(Z_N, Z_{N+2}, \dots, Z_{N+2p}) \left( 1 - \frac{1}{N!} \varepsilon_N \right) \right) \tau_{[N+1, N+2p]} \sigma^{-1}.$$

Hence, using the notation of Lemma 2.4.9, as  $t$  goes to infinity,

$$\rho_O(\mathcal{I}_{n,t}(N)) \rightarrow \rho_O\left(\tilde{\mathcal{I}}_n(N) + \mathcal{I}'_n(N)\right). \quad (2.21)$$

Let  $A \in O(N) \setminus SO(N)$ , note that  $A^{\otimes n} \rho_O(\tilde{\mathcal{I}}_n(N)) = \rho_O(\tilde{\mathcal{I}}_n(N))$  and  $A^{\otimes n} \rho_O(\mathcal{I}'_n(N)) = -\rho_O(\mathcal{I}'_n(N))$ . Therefore, as  $t$  goes to infinity,

$$\frac{1}{2}(1 + A^{\otimes n})\rho_O(\mathcal{I}_{n,t}(N)) \rightarrow \rho_O(\tilde{\mathcal{I}}_n(N)). \quad (2.22)$$

To complete the proof of the formulas, we shall now show that relation (2.12) holds true for all integers  $N$ , as well as its analog for the elements  $Y_1(N), \dots, Y_i(N)$ . We shall prove that  $\tilde{\mathcal{I}}_n(z) = \mathcal{I}_n(z)$  and  $\tilde{\mathcal{I}}_{n,m}(z) = \mathcal{I}_{n,m}(z)$ , for any  $z \in \mathbb{C}$ . For any finite group  $K$ , let us write  $\mathcal{P}_K = \frac{1}{|K|} \sum_{k \in K} k \in \mathbb{C}[K]$ . For any partition  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots)$ , let  $2\lambda$  denote the partition  $(2\lambda_1, 2\lambda_2, \dots)$ . Recall the fact proved in [57] that for any partition  $\mu \vdash 2p$  with one odd component  $\mathcal{P}_\mu \mathcal{P}_{\mathcal{H}_{2p}} = 0$ . In the following lemma, we denote by  $D(\mathfrak{S}_i)$  the subgroup of  $\mathfrak{S}_{2i}$  formed by  $\{\sigma \times \sigma \in \mathfrak{S}_{2i} : \sigma \in \mathfrak{S}_i\}$ .

**Lemma 2.4.14.** *i) For any integer  $i \geq 1$ ,*

$$(X_1 + X_2 + \dots + X_{2i})\mathcal{P}_{\mathcal{H}_{2i}} = \mathcal{P}_{\mathcal{H}_{2i}} i(1 + X_{2i-1})\mathcal{P}_{\mathcal{H}_{2i}}$$

and

$$\sum_{\substack{1 \leq a < b \leq i \\ \text{or } i < a < b \leq 2i}} (a \ b) \mathcal{P}_{D(\mathfrak{S}_i)} = \mathcal{P}_{D(\mathfrak{S}_i)} i X_i \mathcal{P}_{D(\mathfrak{S}_i)}.$$

ii) *Let us assume that  $\mathbf{G}(z)$  and  $Z_2(z), Z_4(z), \dots, Z_{2p}(z)$  have inverses in  $\mathbb{C}[\mathfrak{S}_{2p}]$ . Then*

$$z^p \mathbf{G}(z)^{-1} \mathcal{P}_{\mathcal{H}_{2p}} = p! \mathcal{P}_{\mathcal{H}_{2p}} Z_2^{-1} Z_4^{-1} \dots Z_{2p}^{-1}(z) \mathcal{P}_{\mathcal{H}_{2p}}.$$

Besides, if  $\Omega(z)$  and  $Y_1(z), Y_2(z), \dots, Y_p(z)$  have inverses in  $\mathbb{C}[\mathfrak{S}_p]^2$ , then

$$z^p \Omega(z)^{-1} \mathcal{P}_{D(\mathfrak{S}_p)} = p! \mathcal{P}_{D(\mathfrak{S}_p)} Y_1^{-1} Y_2^{-1} \dots Y_p^{-1}(z) \mathcal{P}_{D(\mathfrak{S}_p)}.$$

iii) *For any  $\lambda \vdash p$ , set  $R_\lambda = \prod_{(i,j) \in \lambda} (z + j - i)^{-1}$ ,  $R_{2,\lambda} = \prod_{(i,j) \in \lambda} (z + 2j - i)$ ,*

$$\mathbf{W}(z) = \sum_{\lambda \vdash p} R_{2,\lambda}^{-1} \mathcal{P}_{2\lambda}$$

and

$$\mathbf{Wg}(z) = \sum_{\lambda \vdash p} R_\lambda^{-1} \mathcal{P}_\lambda.$$

The rational functions  $\mathbf{W}(z) \mathcal{P}_{\mathcal{H}_p}$  and  $\mathbf{Wg}(z)$  are respectively pseudo-inverses of  $\mathbf{G}(z) \mathcal{P}_{\mathcal{H}_p}$  and  $\Omega(z)$  and

$$p!(-2N)^{-p} \rho_S \left( \mathcal{P}_{\mathcal{H}_{2p}} Z_2^{-1}(-2N) Z_4^{-1}(-2N) \dots Z_{2p}^{-1}(-2N) \mathcal{P}_{\mathcal{H}_{2p}} \right) = \rho_S(\mathbf{W}(-2N) \mathcal{P}_{\mathcal{H}_{2p}})$$

$$p! N^{-p} \rho_O \left( Y_1^{-1}(N) Y_2^{-1}(N) \dots Y_p^{-1}(N) \mathcal{P}_{D(\mathfrak{S}_p)} \right) = \rho_O \left( \mathbf{Wg}(N) \mathcal{P}_{D(\mathfrak{S}_p)} \right)$$

and

$$p! N^{-p} \rho_O \left( \mathcal{P}_{\mathcal{H}_{2p}} Z_2^{-1}(N) Z_4^{-1}(N) \dots Z_{2p}^{-1}(N) \mathcal{P}_{\mathcal{H}_{2p}} \right) = \rho_O(\mathbf{W}(N) \mathcal{P}_{\mathcal{H}_{2p}}).$$

*Proof.* i) Let us write the left-hand side of the first formula as  $\sum_{1 \leq a < b \leq 2i} (a \ b) \mathcal{P}_{\mathcal{H}_{2i}}$ . Observe that the transpositions  $(2k-1 \ 2k)$  for  $1 \leq k \leq i$  belong to  $\mathcal{H}_{2i}$  and that the other transpositions with support in  $\{1, \dots, 2i\}$  are conjugated to  $(2i-2 \ 2i-1)$  by an element of  $\mathcal{H}_{2i}$ . As  $X_1 + \dots + X_{2i} = \sum_{1 \leq a < b \leq 2i} (a \ b)$  is in the center of  $\mathfrak{S}_{2i}$ , we get the first equality conjugating by elements of  $\mathcal{H}_{2i}$  on both sides of the equation. A similar proof with  $D(\mathfrak{S}_i)$  in place of  $\mathcal{H}_{2i}$  yields the second formula.

ii) Let us prove this assertion inductively on  $p$ . For  $p = 1$ , the assertion is equivalent to  $zZ_2(z)\mathcal{P}_{\mathcal{H}_2} = z\mathcal{P}_{\mathcal{H}_2}$ . Recall that  $zZ_2 = z - 1 + (1 \ 2)$ , so assertion holds true for  $p = 1$ . Assume that it is true for  $p \geq 1$ . Note that as  $\mathbf{G}(z)$  is invertible in  $\mathbb{C}[\mathfrak{S}_{2p+2}]$ , for any  $i \in \{1, \dots, p+2\}$ ,  $z + X_{2i-1}$  has an inverse. Using that  $Z_{2p+2}$  is in the center of  $\mathbb{C}[\mathfrak{S}_{2p+2}]$ , the assumption yields

$$\begin{aligned} (p+1)!z^{-p-1}\mathcal{P}_{\mathcal{H}_{2p+2}}Z_2^{-1}Z_4^{-1}\cdots Z_{2p+2}^{-1}\mathcal{P}_{\mathcal{H}_{2p+2}} &= (p+1)\mathcal{P}_{\mathcal{H}_{2p+2}}\prod_{i=1}^p(z+X_{2i-1})^{-1}z^{-1}Z_{2p+2}^{-1}\mathcal{P}_{\mathcal{H}_{2p+2}} \\ &= \mathcal{P}_{\mathcal{H}_{2p+2}}\mathbf{G}(z)^{-1}p(z+X_{2p+1})z^{-1}Z_{2p+2}^{-1}\mathcal{P}_{\mathcal{H}_{2p+2}}. \end{aligned}$$

Recall that  $zZ_{2p+2}(z) = (z-1)(p+1) + X_1 + \dots + X_{2p+2}$ . The point i) implies the relation  $(p+1)\mathcal{P}_{\mathcal{H}_{2p+2}}(z+X_{2p+1})\mathcal{P}_{\mathcal{H}_{2p+2}} = zZ_{2p+2}(z)\mathcal{P}_{\mathcal{H}_{2p+2}}$ . What is more, thanks to Lemma 2.4.5,  $\mathcal{P}_{\mathcal{H}_{2p+2}}\mathbf{G}(z)^{-1} = \mathbf{G}(z)^{-1}\mathcal{P}_{\mathcal{H}_{2p+2}}$ . These two facts yield the formula for  $p+1$ . Using that  $Y_p$  and  $\Omega(z)$  commute with  $D(\mathfrak{S}_p)$ , the same proof holds for the second formula.

iii) For any  $\lambda \vdash p$ , point ii) implies the following equality of  $\mathbb{C}[\mathfrak{S}_{2p}]$ -valued rational functions

$$\mathbf{G}(z)^{-1}\mathcal{P}_{2\lambda}\mathcal{P}_{\mathcal{H}_{2p}} = p!z^{-p}\mathcal{P}_{\mathcal{H}_{2p}}Z_2^{-1}(z)Z_4^{-1}(z)\cdots Z_{2p}^{-1}(z)\mathcal{P}_{2\lambda}\mathcal{P}_{\mathcal{H}_{2p}}$$

and

$$\Omega(z)^{-1}\mathcal{P}_\lambda\mathcal{P}_{D(\mathfrak{S}_p)} = p!z^{-p}\mathcal{P}_{D(\mathfrak{S}_p)}Y_1^{-1}(z)Y_2^{-1}(z)\cdots Y_p^{-1}(z)\mathcal{P}_\lambda\mathcal{P}_{D(\mathfrak{S}_p)}.$$

Recall that  $\mathcal{P}_\lambda$  is a projector whose image is included in the kernel of the restriction of  $\rho_O$  (resp.  $\rho_S$ ) to  $\mathbb{C}[\mathfrak{S}_{2p}]$  as  $l(\lambda) > N$  (resp., because  $\rho_S(\mathcal{P}_\lambda) = \rho_O(\mathcal{P}_{\lambda'})$ ,  $l(\lambda') > 2N$ ). Thanks to Lemma 2.4.12, these equalities of rational functions can be evaluated to yield the formulas of point iii).  $\square$

## 2.5 Expectation of tensors with respect to Brownian motion's law

The rest of the paper is devoted to the proof of our main result Theorem 2.4.7.

### 2.5.1 The Casimir element and its representations

Let  $(G_t)_{t \geq 0}$  be a Brownian motion issued from Id on a compact Lie group  $G$  that belongs to one of the classical series  $O(N)$ ,  $U(N)$  or  $Sp(N)$ . For any finite dimensional representation  $(V_\rho, \rho)$  and any  $t \geq 0$ ,

$$\frac{d}{dt}\mathbb{E}[\rho(G_t)] = \mathbb{E}\left[\frac{1}{2}\Delta_G(\rho)(G_t)\right] = \mathbb{E}\left[\frac{1}{2}\rho(c_{\mathfrak{g}})\rho(G_t)\right] \in \text{End}(V_\rho)$$

and

$$\mathbb{E}[\rho(G_t)] = \exp\left(\frac{t}{2}\rho(c_{\mathfrak{g}})\right). \quad (2.23)$$

Let us recall that the element  $c_{\mathfrak{g}}$  is invariant by adjunction, hence  $\rho(c_{\mathfrak{g}}) \in \text{End}_G(V_{\rho})$ . Our aim here is to give an explicit expression for  $\exp(\frac{t}{2}c_{\mathfrak{g}})$  as an element of  $\text{End}_G(V_{\rho})$  when  $(V_{\rho}, \rho)$  is a tensor power of the fundamental representation. All the following formulas but the last one are proved in Proposition 2.6 and 2.8 of [34].

**Lemma 2.5.1.** *For any integers  $n$  and  $m$ , let us write*

$$\Delta_{\mathcal{B}_n}(z) = -\frac{(1-z^{-1})n}{2} + z^{-1} \sum_{1 \leq a < b \leq n} \tau_{a,b} - s_{a,b} \in \mathcal{B}_n(z)$$

and

$$\Delta_{\mathcal{B}_{n,m}}(z) = p^w(\Delta_{\mathcal{B}_{n+m}}(z)) - \frac{n+m}{2z} \in \mathcal{B}_{n,m}(z).$$

The Casimir elements of the classical groups have the following tensor representations :

$$\rho_{V^{\otimes n}}(c_{\mathfrak{o}(N)}) = 2\rho_O(\Delta_{\mathcal{B}_n}(N)),$$

$$\rho_{V^{\otimes n}}(c_{\mathfrak{sp}(N)}) = 2\rho_S(\Delta_{\mathcal{B}_n}(-2N))$$

and

$$\rho_{V^{\otimes n}} \otimes \bar{\rho}_{V^{\otimes m}}(c_{\mathfrak{u}(N)}) = 2\rho_O(\Delta_{\mathcal{B}_{n,m}}(N)).$$

*Proof.* Let us prove the third equality. Let us choose the orthonormal basis  $\{\frac{1}{\sqrt{2N}}(E_{k,l}-E_{l,k}), \frac{i}{\sqrt{2N}}(E_{k,l}+E_{l,k}) : 1 \leq k < l \leq N\}$  of  $(\mathfrak{u}(N), \langle \cdot, \cdot \rangle)$  and compute the Casimir as an element of the real algebra  $\mathcal{U}(\mathfrak{gl}_N(\mathbb{C}))$  :

$$Nc_{\mathfrak{u}(N)} = \frac{1}{2} \sum_{1 \leq k, l \leq N} (1 + i \otimes i)E_{k,l} \otimes E_{k,l} + (i \otimes i - 1)E_{k,l} \otimes E_{l,k} \in \mathcal{U}(\mathfrak{gl}_N(\mathbb{C})).$$

Considering  $\rho_{V^{\otimes n}} \otimes \bar{\rho}_{V^{\otimes m}}$  as a representation of the real envelopping algebra  $\mathcal{U}(\mathfrak{gl}_N(\mathbb{C}))$  implies that

$$\begin{aligned} N\rho_{V^{\otimes n}} \otimes \bar{\rho}_{V^{\otimes m}}(c_{\mathfrak{u}(N)}) &= (n+m)N\text{Id}_{V^{\otimes n+m}} + 2 \sum_{1 \leq a \leq n < b \leq n+m} \langle a \ b \rangle - 2 \sum_{\substack{1 \leq a < b \leq n+m \\ a, b \leq n \text{ or } a, b > n}} \langle a \ b \rangle \\ &= \rho_O \left( (n+m)N\text{Id}_{\mathcal{B}_{n+m}(N)} + 2p^w \left( \sum_{1 \leq a < b \leq n+m} \tau_{a,b} - s_{a,b} \right) \right). \end{aligned}$$

Dividing by  $N$  yields the result.

Let us check the formula for the symplectic group. Let us define  $\iota : M_N(\mathbb{C}) \times M_N(\mathbb{C}) \rightarrow M_{2N}(\mathbb{C}) : (A, B) \mapsto \begin{pmatrix} A & -\bar{B} \\ B & \bar{A} \end{pmatrix}$  and recall that  $\mathfrak{sp}(N) = \{\iota(A, B) : A \in \mathfrak{u}(N), B \in M_N(\mathbb{C}), {}^t B = B\}$ . Let us choose the basis of  $\mathfrak{sp}(N)$  formed by the union of the following families :

$$\frac{1}{2\sqrt{N}} \{ \iota(E_{a,b} - E_{b,a}, 0), \iota(0, E_{a,b} - E_{b,a}), \iota(i(E_{a,b} + E_{b,a}), 0), \iota(0, i(E_{a,b} + E_{b,a})) : 1 \leq a < b \leq N \}$$

and

$$\frac{1}{\sqrt{2N}} \{ \iota(iE_{a,a}, 0), \iota(0, E_{a,a}), \iota(0, iE_{a,a}) : 1 \leq a \leq N \}.$$

Using this orthogonal basis, the Casimir element of  $\mathfrak{sp}(N)$ , viewed as an element of the complex envelopping algebra  $\mathcal{U}(\mathfrak{gl}_N(\mathbb{C}))$ , has the following expression :

$$-2Nc_{\mathfrak{sp}(N)} = - \sum_{1 \leq a,b,c,d \leq 2N} J_{a,c} J_{b,d} E_{a,b} \otimes E_{c,d} + \sum_{1 \leq a,b \leq 2N} E_{a,b} \otimes E_{b,a} \in \mathcal{U}(\mathfrak{gl}_N(\mathbb{C})).$$

Considering  $\rho_{V^{\otimes n}}$  as a representation of the algebra  $\mathcal{U}(\mathfrak{gl}_N(\mathbb{C}))$  yields

$$\begin{aligned} -2N\rho_{V^{\otimes n}}(\Delta_{\mathfrak{Sp}(2N)}) &= 2(2N+1)n + 2 \sum_{1 \leq a < b \leq n} (a \ b) - \langle a \ b \rangle_{\omega} \\ &= 2\rho_S \left( (2N+1)n + \sum_{1 \leq a < b \leq n} \tau_{a,b} - s_{a,b} \right). \end{aligned}$$

Dividing by  $-2N$  gives the announced formula.  $\square$

In the following section, we shall give a reduction of the morphism of multiplication by  $\Delta_{\mathcal{B}_n}(z)$  (resp.  $\Delta_{\mathcal{B}_{n,m}}(z)$ ) in the algebra  $\mathcal{B}_n(z)$  (resp.  $\mathcal{B}_{n,m}(z)$ ).

### 2.5.2 A decomposition of the Brauer algebra

For any subset  $A$  of  $\{1, \dots, n\}$ , let us denote by  $\mathcal{M}_A$  the set of partition in  $\mathcal{M}(2n)$  such that  $n+A$  is the maximal subset of  $\{n+1, \dots, 2n\}$  not connected to  $\{1, \dots, n\}$ . For any integer  $p$  less than  $n$ , let  $M_p$  be the vector space spanned by  $\cup_{A \subset \{1, \dots, n\}: |A|=2p} \mathcal{M}_A$  and define  $(P_{M_p})_{0 \leq 2p \leq n}$  the family of projectors induced by the decomposition  $\mathcal{B}_n(z) = \bigoplus_{0 \leq 2p \leq n} M_p$ .

**Lemma 2.5.2.** *Let  $n \leq m$  be two integers. Let  $A \subset \{1, \dots, n\}$  and  $\pi \in \mathcal{M}_A$ . For any  $a \neq b \notin A$ ,  $s_{a,b}\pi \in \mathcal{M}_A$  and  $\tau_{a,b}\pi \in \mathcal{M}_{A \cup \{a,b\}}$ . What is more,*

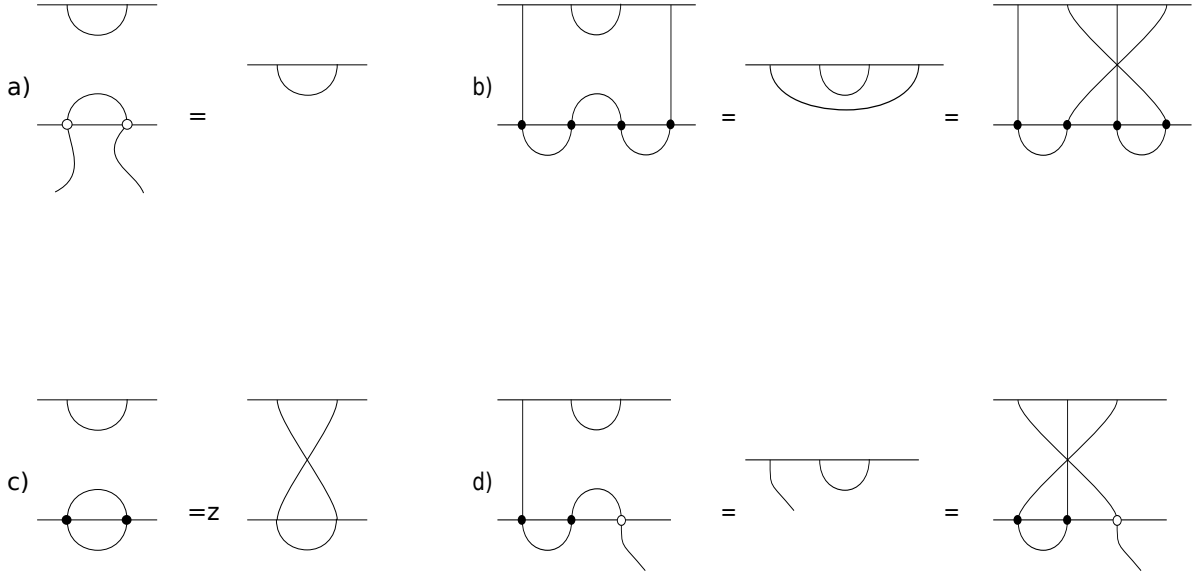
$$\Delta_{\mathcal{B}_n}(z)\pi = \left( -\frac{(1-z^{-1})(n-|A|)}{2} + z^{-1} \sum_{a < b: a,b \notin A} \tau_{a,b} - s_{a,b} \right) \pi$$

and if  $\pi \in \mathcal{M}(n, m)$ ,

$$\Delta_{\mathcal{B}_{n,m}}(z)\pi = \left( -\frac{(n+m-|A|)}{2} + z^{-1} \sum_{a < b: a,b \notin A} p^w (\tau_{a,b} - s_{a,b}) \right) \pi.$$

*Proof.* We shall prove the two formulas and leave the first point to the reader. For any  $k \in \{1, \dots, n\}$ , set  $k' = k+n$  and let  $\pi(k') \in \{1, \dots, 2n\}$  denote the two integers such that  $\{k', \pi(k')\}$  is a block of  $\pi$ . For any  $1 \leq k \neq l \leq n$ , let us compute  $\tau_{k,l}\pi$  taking into account whether  $k'$  or  $l'$  are in  $A$  and whether they are in the same block of  $\pi$  (see figure 2.4) :

- a) If  $k', l' \notin A$ ,  $\tau_{k,l}\pi \in \mathcal{M}_{A \cup \{k,l\}}$ ,
- b) if  $k', l' \in A$  and  $l' \neq \pi(k')$ ,  $\tau_{k,l}\pi = s_{k, \pi(l')-n}\pi$ ,

FIGURE 2.4 – Left multiplication of an element of  $\mathcal{M}_A$  by  $\tau_{k,l}$ .

c) if  $k', l' \in A$  and  $l' = \pi(k')$ ,  $\tau_{k,l}\pi = z s_{k,l}\pi = z\pi$ ,

d) if  $k' \in A$  and  $l' \notin A$ ,  $\tau_{k,l}\pi = s_{\pi(k')-n,l}\pi$ .

This relations yield the following identity

$$\left( \sum_{1 \leq k < l \leq n} \tau_{k,l} - s_{k,l} \right) \pi = \left( \frac{(z-1)|A|}{2} + \sum_{1 \leq a < b \leq n: a, b \notin A} \tau_{a,b} - \sum_{1 \leq a < b \leq n: a, b \notin A} s_{a,b} \right) \pi \in \mathcal{B}_n(z).$$

Note that if  $\pi \in \mathcal{M}(n, m)$ , transpositions "crossing the wall" appearing in c) do not occur if we consider just elements in  $\mathcal{B}_{n,m}(z)$  and

$$p^w \left( \sum_{1 \leq k < l \leq n} \tau_{k,l} - s_{k,l} \right) \pi = \left( \frac{z|A|}{2} + \sum_{1 \leq a < b \leq n: a, b \notin A-n} \tau_{a,b} - \sum_{1 \leq a < b \leq n: a, b \notin A-n} s_{a,b} \right) \pi \in \mathcal{B}_{n,m}(z).$$

The result follows from these two formulas.  $\square$

The former decomposition of the Brauer algebras yields explicit formulas for the power of the elements  $\Delta_{\mathcal{B}_n}(z)$  and  $\Delta_{\mathcal{B}_{n+m}}(z)$  through the following lemma.

**Lemma 2.5.3.** *i) For any  $r < k$ ,  $P_{M_k} \Delta_{\mathcal{B}_n}^r = P_{M_k} \Delta_{\mathcal{B}_{n,m}}^r = 0$ .*

ii) For  $r \geq k$ , if  $2p < n$ ,

$$z^k P_{M_k} \Delta_{\mathcal{B}_n}^r = \frac{(-1)^{r-k}}{2^k(n-2k)!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \sigma h_{r-k}(Z_{n-2k}, Z_{n-2k+2}, \dots, Z_n) \tau_{[n-2k+1, n]} \sigma^{-1}$$

and if  $k < n$  or  $n < m$ ,

$$z^k P_{M_k} \Delta_{\mathcal{B}_{n,m}}^r = \frac{(-1)^{r-k}}{(n-k)!(m-k)!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n \times \mathfrak{S}_m} \sigma h_{r-k}(Y_{n-k}, \dots, Y_{n-1}, Y_n) \tilde{\tau}_{[n-k+1, n]} \sigma^{-1}.$$

iii) For  $r \geq p$ , if  $n = 2p$ ,

$$z^p P_{M_p} \Delta_{\mathcal{B}_n}^r = \frac{(-1)^{r-p}}{2^p} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \sigma h_{r-p}(Z_2, Z_4, \dots, Z_n) \tau_{[1, n]} \sigma^{-1}$$

and if  $n = m$

$$z^n P_{M_n} \Delta_{\mathcal{B}_{n,n}}^r = (-1)^{r-n} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n \times \mathfrak{S}_n} \sigma h_{r-n}(Y_1, Y_2, \dots, Y_n) \tilde{\tau}_{[1, n]} \sigma^{-1}.$$

*Proof.* The first assertion of Lemma 2.5.2 implies that for any  $r \geq 0$ ,  $\Delta_{\mathcal{B}_n(z)}^r \in \bigoplus_{0 \leq k \leq r} M_k$  and the point i) follows. We shall prove points ii) and iii) only for  $\Delta_{\mathcal{B}_n}(z)$ , the same proof applies to the computation of powers of  $\Delta_{\mathcal{B}_{n,m}}(z)$ . For  $q_1 < q_2, \dots, q_{2k-1} < q_{2k}$  distinct non-zero integers smaller than  $n$ , note  $B = \{1, \dots, n\} \setminus \{q_1, q_2, \dots, q_{2k}\}$  and for  $r \geq k$ , let  $F_r(q_1, q_2, \dots, q_{2k-1}, q_{2k}) \in \mathcal{B}_n(z)$  be the element

$$\sum_{\substack{l_0, l_1, \dots, l_k \geq 0 \\ l_0 + \dots + l_k = r-k}} Z_B^{l_0} \tau_{q_1, q_2} Z_{B \cup \{q_1, q_2\}}^{l_1} \tau_{q_3, q_4} \dots Z_{\{1, \dots, n\} \setminus \{q_{2k-1}, q_{2k}\}}^{l_{k-1}} \tau_{q_{2k-1}, q_{2k}} Z_{\{1, \dots, n\}}^{l_k},$$

if  $B \neq \emptyset$ , and

$$\sum_{\substack{l_1, \dots, l_k \geq 0 \\ l_1 + \dots + l_k = r-k}} \tau_{q_1, q_2} Z_{\{q_1, q_2\}}^{l_1} \tau_{q_3, q_4} \dots Z_{\{1, \dots, n\} \setminus \{q_{2k-1}, q_{2k}\}}^{l_{k-1}} \tau_{q_{2k-1}, q_{2k}} Z_{\{1, \dots, n\}}^{l_k},$$

otherwise. For  $r \geq k$ , Lemma 2.5.2 yields

$$z^k P_{M_k} \Delta_{\mathcal{B}_n}^r(z) = (-1)^{r-k} \sum_{\substack{q_1 < q_2, \dots, q_{2k-1} < q_{2k} \\ \#\{q_1, \dots, q_{2k}\} = 2k}} F_r(q_1, q_2, \dots, q_{2k-1}, q_{2k}). \quad (2.24)$$

For  $r \geq k$  and  $2k < n$ ,

$$F_{r,k} = \sum_{\substack{l_0, l_1, \dots, l_k \geq 0 \\ l_0 + \dots + l_k = r-k}} Z_{n-2k}^{l_0} \tau_{n-2k+1, n-2k+2} Z_{n-2k+2}^{l_1} \tau_{n-2k+3, n-2k+4} \dots Z_{n-2}^{l_{k-1}} \tau_{n-1, n} Z_n^{l_k} \in M_k,$$

if  $n = 2k$ , let

$$F_{r,k} = \sum_{\substack{l_1, \dots, l_k \geq 0 \\ l_1 + \dots + l_k = r-k}} \tau_{1,2} Z_2^{l_1} \tau_{3,4} \dots Z_{n-2}^{l_{k-1}} \tau_{n-1, n} Z_n^{l_k}.$$



Using these notations, the formula (2.24) implies that

$$P_{M_k} \Delta_{\mathcal{B}_n}^r = \frac{(-1)^{r-k}}{2^k z^k (n-2k)!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \sigma F_{r,k} \sigma^{-1}.$$

Using the fact that if  $1 \leq i < j \leq n$ ,  $\tau_{j,j+1}$  commutes with  $Z_i$  and that the elements  $(Z_s)_{1 \leq s \leq n}$  commute with each other, allows to reorder the product occuring in the expression of  $F_{k,p}$ . For  $2k < n$ , it yields

$$F_{r,k} = \tau_{n-2k+1, n-2k+2} \cdots \tau_{n-1, n} h_{r-k}(Z_{n-2k}, Z_{n-2k+2}, \dots, Z_n)$$

and if  $n = 2k$ ,

$$F_{r,k} = \tau_{1,2} \cdots \tau_{n-1, n} h_{r-k}(Z_2, Z_4, \dots, Z_n).$$

□

*Proof of Theorem 2.4.7 :* Expanding the exponential into power series and using the assertion ii) of Lemma 2.5.3 combined with Lemma 2.4.6 imply that for  $2k < n$ ,

$$P_{M_k} \exp[t \Delta_{\mathcal{B}_n}(z)] = \mathcal{I}_{n,t}^k(z)$$

and for  $k < n$  or  $k = n$  and  $n < m$ ,

$$P_{M_k} \exp[t \Delta_{\mathcal{B}_{n,m}}(z)] = \mathcal{I}_{n,m,t}^k(z).$$

Using iii) of Lemma 2.5.3 implies that if  $n = 2p$ ,

$$P_{M_p} \exp[t \Delta_{\mathcal{B}_n}(z)] = \frac{1}{2^p z^p} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{2p}} \sigma s_t(0, Z_2, Z_4, \dots, Z_{2p}) \tau_{[1,2p]} \sigma^{-1}$$

and for any integer  $n$ ,

$$P_{M_n} \exp[t \Delta_{\mathcal{B}_{n,n}}(z)] = \frac{1}{z^n} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n \times \mathfrak{S}_n} \sigma s_t(0, Y_1, Y_2, \dots, Y_n) \tilde{\tau}_{[1,n]} \sigma^{-1}.$$

We can now conclude the proof using formula (2.23) and Lemma 2.5.1.

□

## Chapitre 3

# Gaussian Master Field on the plane

The purpose of this text is to prove a fluctuation result for the convergence of the unitary Yang-Mills measure towards the master field on the plane proved in [35]. The limiting object is a Gaussian field indexed by rectifiable paths on the plane. During the proof, we get that the Yang-Mills measure converges to all orders in the sense of higher order free probability. These limits define invariants for  $k$ -tuples of loops of finite length that match at the first order the  $U(1)$ -Yang-Mills as the area goes to zero. We give a combinatorial proof of traces fluctuations for the Brownian motion and a simple expression for the generating function of their covariances. We give also a combinatorial proof of the Makeenko-Midgal equations for the unitary group.

### 3.1 Unitary Brownian motion and its large $N$ limits

In this section, we shall lay the corner stone to prove our theorem. We will first study traces of powers of one single unitary Brownian motion. We will present the results obtained in [5] and [36] about convergence and fluctuations of these functions as  $N \rightarrow \infty$ . We give a different proof of the fluctuations : we shall prove that the unitary Brownian motion converges to all orders which implies the Gaussian fluctuations of traces of polynomials in the unitary Brownian motion. Though, we do not prove the fluctuation for Lipschitz functions proved in [36] but focus on polynomials. What is more, we give a simple expression for the generating series of the covariances. One application of this formula is to give easily the behavior of covariances as  $t \rightarrow \infty$ .

#### 3.1.1 Definition and time scale of unitary Brownian motion

For any integer  $N$ , we shall write  $U(N)$  for the group of unitary matrices of  $M_N(\mathbb{C})$  and  $\mathfrak{u}(N)$  for its Lie algebra, that is, the set of skew-hermitian matrices. We define a scalar product  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  on  $\mathfrak{u}(N)$  by setting for any  $X, Y \in \mathfrak{u}(N)$ ,

$$\langle X, Y \rangle = -N \operatorname{Tr}(XY).$$

Let us write  $(K_t)_{t \geq 0}$  the Brownian motion on the Euclidean space  $(\mathfrak{u}(N), \langle \cdot, \cdot \rangle)$ , that is, the Gaussian process such that for any  $X, Y \in \mathfrak{u}(N)$ ,  $t, s > 0$ ,

$$\mathbb{E}[\langle X, K_t \rangle \langle Y, K_s \rangle] = \langle X, Y \rangle \min(t, s).$$

Let us define  $(U_t)_{t \geq 0}$  as the  $M_N(\mathbb{C})$ -valued solution of the following stochastic differential equation :

$$\begin{aligned} dU_t &= U_t dK_t - \frac{1}{2} U_t dt \\ U_0 &= \text{Id}. \end{aligned} \quad (*)$$

Recall that  $\langle\langle \cdot \rangle\rangle$  denotes the matrix of termwise quadratic variations, so that  $\langle dK_t, dK_t \rangle = -dt \text{Id}$  and Itô's formula yields

$$d(U_t U_t^*) = U_t(dK_t + dK_t^*)U_t^* + U_t(\langle dK_t, dK_t^* \rangle - dt \text{Id})U_t^* = 0.$$

Therefore, the process  $(U_t)_{t \geq 0}$  is  $U(N)$ -valued. It is called the *unitary Brownian motion*. For  $N = 1$ , this process has the same law as  $(e^{iB_t})_{t \geq 0}$ , where  $(B_t)_{t \geq 0}$  is the standard real Brownian motion. Let us make few remarks on the scaling. Let us write  $d$  the metric on  $U(N)$  that is induced by the scalar product  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  on  $\mathfrak{u}(N)$ . On the one hand, this choice of metric yields that the diameter of  $U(N)$  is  $d(\text{Id}, -\text{Id}) = \int_0^1 \|\dot{\gamma}_t\| dt$ , where  $\gamma : t \in [0, 1] \mapsto \exp(ti\pi \text{Id}_N)$ , that is,  $\|i\pi \text{Id}\| = N\pi$ . On the other hand, the law of large numbers implies that  $\dim(\mathfrak{u}(N))^{-1} \|K_t\|^2 = N^{-2} \|K_t\|^2$  converges, as  $N \rightarrow \infty$ , towards  $t$ . Heuristically, we may infer that, as  $N \rightarrow \infty$ , for any  $t > 0$ ,  $d(\text{Id}, U_t)$  behaves like  $\|K_t\|$  and  $\frac{d(U_t, \text{Id})}{d(\text{Id}, -\text{Id})} \rightarrow C_t \in (0, \infty)$ . With this scaling, the Brownian motion "has the time to visit" <sup>1</sup>  $U(N)$ . Besides, the stochastic differential equation  $(*)$  does not depend on  $N$  and such an equation makes sense in the context of free stochastic differential equations (see [5]). What is more, the  $U(1)$ -Brownian motion appears with the same scaling in all  $U(N)$ -Brownian motions.

**Lemma 3.1.1.** *For any  $N \in \mathbb{N}^*$ , let  $(U_{t,N})_{t \geq 0}$  be a  $U(N)$ -Brownian motion. Then,  $(\det(U_{t,N}))_{t \geq 0}$  has the same distribution as  $(U_{t,1})_{t \geq 0}$ .*

*Proof.* Observe that for any  $N \in \mathbb{N}^*$ ,  $(i\text{Tr}(K_t))_{t \geq 0}$  has the same law as a standard Brownian motion. Itô's formula yields that

$$d(\det(U_t)) = \det(U_t) d\text{Tr}(K_t) - \frac{N}{2} \det(U_t) dt + \frac{\det(U_t)}{2} \langle D_2(\det)_{\text{Id}}(dK_t, dK_t) \rangle.$$

What is more,

$$\langle D_2(\det)_{\text{Id}}(dK_t, dK_t) \rangle = \sum_{1 \leq i < j \leq N} (\langle (dK_t)_{i,i}, (dK_t)_{j,j} \rangle - \langle (dK_t)_{j,i}, (dK_t)_{i,j} \rangle) = -\frac{N(N-1)}{2N} dt.$$

Hence,

$$d(\det(U_t)) = \det(U_t) d(\text{Tr}(K_t)) - \frac{1}{2} \det(U_t) dt$$

and  $\det(U_0) = 1$ . □

---

1. Note that a good scaling to study the convergence of the distance in total variation  $d_{TV}$  between the law of Brownian motion and the Haar measure, is faster than ours. Let  $U$  be a Haar distributed random variable on  $U(N)$ . It has been shown in [42] that the function  $t \mapsto d_{TV}(U_{t \log(N)}, U)$  admits a cut-off around the value  $t = 2$ .

### 3.1.2 All orders limit distribution of the unitary Brownian motion

We will now address the issue of the behavior of traces  $\text{tr}(U_t^n) = N^{-1}\text{Tr}(U_t^n)$  of a  $U(N)$ -valued Brownian motion. Let us denote by  $(\mu_t^N)_{t \geq 0}$  the family of random measures given by the empirical law of eigenvalues of  $U_t$  : if  $\lambda_1, \dots, \lambda_N \in \mathbb{U}$  are the eigenvalues of  $U_t$ ,  $\mu_t^N = \frac{1}{N}(\delta_{\lambda_1} + \dots + \delta_{\lambda_N})$ . For any polynomial function  $P \in \mathbb{C}[X]$ , note that  $\text{tr}(P(U_t)) = \int_{\mathbb{U}} P(z) \mu_t(dz)$ .

#### First order limit

The following theorem has been proved in [5] using harmonic analysis on the unitary group.

**Theorem 3.1.2.** *The sequence of random measures  $(\mu_t^N)_{N \geq 0}$  converges weakly in probability<sup>2</sup>, towards a deterministic measure  $\mu_t$  on  $\mathbb{U}$ , whose moments are given as follows :*

$$\mu_{t,n} = \int_{\mathbb{U}} z^n \mu_t(dz) = e^{-\frac{nt}{2}} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-t)^k}{k!} n^{k-1} \binom{n}{k+1}.$$

This result has been proved in another way in [34]. We shall follow this approach in our study. Let us recall the arguments of this proof. For any permutation  $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ , denote by  $\#\sigma$  the number of cycles of  $\sigma$ . Define a  $D(0,1)$ -valued function  $f_\sigma$  on  $U(N)$  by setting

$$f_\sigma(U) = N^{-\#\sigma} \text{Tr}(\sigma U^{\otimes n}), \quad U \in U(N),$$

and for any  $t > 0$ , set

$$\varphi_t^N(\sigma) = \mathbb{E}[f_\sigma(U_{N,t})].$$

This family of functions satisfies the following differential system (see [34] or Lemma 3.1.4).

**Lemma 3.1.3.** *For any permutation  $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ ,*

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \varphi_t^N(\sigma) &= -\frac{n}{2} \varphi_t^N(\sigma) - \sum_{1 \leq i < j \leq n} N^{\#\sigma(i,j) - \#\sigma - 1} \varphi_t^N(\sigma(i,j)), \\ \varphi_0^N(\sigma) &= 1. \end{aligned}$$

Therefore, the solution of this differential system is a power series in  $\frac{1}{N}$  and converges, as  $N \rightarrow \infty$ , to a function  $\varphi_t$ . It is easy to check that the function  $\varphi_t$  is central and multiplicative, that is, for any  $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ , with  $a_k$  cycles of length  $k$ ,

$$\varphi_t(\sigma) = \prod_{k=1}^n \varphi_t((1 \cdots k))^{a_k}.$$

One may further show using Lemma 3.1.3 that for any  $n \in \mathbb{N}^*$ , there exists a constant  $C_n > 0$ , such that

$$\left| \mathbb{E} \left[ \left( \int_{\mathbb{U}} z^n d\mu_t^N(dz) - \mathbb{E} \left[ \int_{\mathbb{U}} z^n d\mu_t(dz) \right] \right)^2 \right] \right| = |\varphi_t^N((1 \cdots n) \times (1 \cdots n)) - \varphi_t^N((1 \cdots n))^2| \leq \frac{C_n}{N^2}.$$

---

2. We mean here that for any continuous function  $f$ , the sequence of random variables  $(\int f d\mu_t^N)_{N \geq 1}$  converges in probability to the constant  $\int f d\mu_t$ .

In the same way, using Lemma 3.1.4 below, one may prove the same bound for  $\text{var}(\int_{\mathbb{U}} z^n d\mu_t^N(dz))$ . Let us set  $\mu_{t,n} = \varphi_t((1 \cdots n))$ . It follows that the sequence of random variables  $(\int z^n d\mu_t^N(z))_{n \geq 0}$  converges towards the deterministic sequence  $(\mu_{t,n})_{n \geq 0}$ . The sequence  $(\mu_{t,n})_{n \geq 0}$  is therefore the sequence of moments of a measure  $\mu_t$  on the unit circle and the measure  $\mu_t^N$  converges weakly in probability, as  $N \rightarrow \infty$ , towards  $\mu_t$ . Let us explicit this one parameter family of measures. Applying the previous lemma for a one-cycle yields the following differential system :

$$\frac{d}{dt}\mu_{t,n} = -\frac{n}{2}\mu_{t,n} - \frac{n}{2} \sum_{k=1}^{n-1} \mu_{t,k}\mu_{t,n-k}. \quad (3.1)$$

Let us rewrite these relations in terms of a generating function. Set

$$L_t(z) = \sum_{n \geq 1} e^{\frac{nt}{2}} \mu_{t,n} z^n.$$

The equation (3.1) implies that  $(L_t(z))_{t \geq 0}$  satisfies the partial differential equation

$$\partial_t L_t(z) = -z L_t(z) \partial_z L_t(z), \quad (3.2)$$

with initial condition  $L_0(z) = \frac{z}{1-z}$ . Note that for any  $t \geq 0$ ,  $L_t$  admits an inverse under composition on a neighbourhood of zero. Denote this family of functions by  $(f_t(z))_{t \geq 0}$ . It satisfies the ordinary differential equation

$$\partial_t f_t(z) = z f_t(z), \quad (3.3)$$

with initial condition  $f_0(z) = \frac{z}{1+z}$ . Hence,

$$f_t(z) = \frac{z}{1+z} e^{tz}.$$

The coefficient of the power series  $L_t(z)$  can now be obtained using Lagrange inversion formula :

$$e^{tn} \mu_{t,n} = -\frac{1}{n} [z^{-1}] f_t(z)^{-n} = -\frac{1}{n} [z^{-1}] (1 + \frac{1}{z})^n e^{-ntz},$$

so that we get the expression given in Theorem 3.1.2. The starting point of our approach was the differential equation of Lemma 3.1.3. Let us give a slight generalization of this Lemma. We will use a larger class of functions. We shall indeed consider not only traces of unitary Brownian motions but also any products of their entries and their complex conjugate. We need to introduce the operators that play the role of permutations on the right-hand-side of Lemma 3.1.3 together with operators that appear whenever we consider functions on  $M_N(\mathbb{C})$  that are neither holomorphic nor antiholomorphic. For any integer  $n$ , we consider the action of the symmetric group  $\mathfrak{S}_n$  on  $(\mathbb{C}^N)^{\otimes n}$  given by permutation of tensors. For any pair of distinct integers  $i, j \in \{1, \dots, n\}$ , we denote by  $\langle i j \rangle$  the endomorphism of  $(\mathbb{C}^N)^{\otimes n}$  which acts like the endomorphism  $\sum_{1 \leq r, s \leq N} E_{r,s} \otimes E_{r,s}$  on the  $i$ th and  $j$ th tensors and trivially on the others.

**Lemma 3.1.4.** *Let  $U_t$  be a Brownian motion on  $U(N)$ . For any positive integers  $a, b$ , which add up to  $n$ , the following differential equation holds :*

$$\frac{d}{dt} \mathbb{E}[U_t^{\otimes a} \otimes \bar{U}_t^{\otimes b}] = -\mathbb{E}[U_t^{\otimes a} \otimes \bar{U}_t^{\otimes b}] \left( \frac{n}{2} + \frac{1}{N} \sum_{i < j \leq a \text{ or } a < i < j} \langle i j \rangle - \frac{1}{N} \sum_{i \leq a < j} \langle i j \rangle \right).$$

For any permutation  $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ ,  $\varphi_t(\sigma) = N^{-\#\sigma} \text{Tr}(\sigma \mathbb{E}[U_t^{\otimes n}])$  and the Lemma 3.1.3 reduces to this more general one.

*Proof.* We shall use the stochastic differential equation (\*) and apply Itô formula. First, writing the  $u(N)$ -valued Brownian motion  $(K_t)_{t \geq 0}$  as a sum of independent real standard Brownian motions yields that

$$\langle\langle dK_t \otimes dK_t \rangle\rangle = -\frac{1}{N} \sum_{1 \leq r, s \leq N} E_{r,s} \otimes E_{s,r} dt = \frac{1}{N} (1 \ 2) dt \in \text{End}((\mathbb{C}^N)^{\otimes 2})$$

and

$$\langle\langle dK_t \otimes d\bar{K}_t \rangle\rangle = \frac{1}{N} \sum_{1 \leq r, s \leq N} E_{r,s} \otimes E_{r,s} = \frac{1}{N} \langle 1 \ 2 \rangle dt.$$

We can now use the Itô formula to get that the variational-bounded part of the variation of the semi-martingales  $U_t^{\otimes 2}$  and  $U_t \otimes \bar{U}_t$  are respectively  $U_t \otimes U_t (-dt + \langle\langle dK_t \otimes dK_t \rangle\rangle) = -U_t^{\otimes 2} (1 + \frac{1}{N} \langle 1 \ 2 \rangle) dt$  and  $U_t \otimes \bar{U}_t (-dt + \langle\langle dK_t \otimes d\bar{K}_t \rangle\rangle) = -U_t \otimes \bar{U}_t (1 - \frac{1}{N} \langle 1 \ 2 \rangle) dt$ . The same analysis yields that the variational-bounded part of the variation of the semi-martingale  $U_t^{\otimes a} \otimes \bar{U}_t^{\otimes b}$  is

$$U_t^{\otimes a} \otimes \bar{U}_t^{\otimes b} \left( -\frac{n}{2} - \frac{1}{N} \sum_{i < j \leq a, \text{ or } a < i < j} (i \ j) + \frac{1}{N} \sum_{i \leq a < j} \langle i \ j \rangle \right) dt.$$

□

### All orders limits and fluctuations around the first order limit

The convergence of the above paragraph can be considered as a law of large numbers for the eigenvalues of a unitary Brownian motion. We want now to investigate an analog of the central limit theorem. Nonetheless, in view of<sup>3</sup> the bounds  $\text{var}(\int_{\mathbb{U}} z^n) = O(N^{-2})$ , a good scaling to study the fluctuation of the convergence of the last paragraph is not  $\sqrt{N}(\mu_t^N - \mu_t)$ . We shall instead study the random signed measure

$$\phi_t^N = N \left( \mu_{t,n}^N - \mu_{t,n} \right).$$

To that purpose, we will follow the same strategy as above and consider the random variables  $\text{Tr}(U_t^n) - N \int x^n \mu_t(dx)$ . We will see in the following that the use of cumulants naturally fits to the approach we have followed in the first paragraph. We shall indeed extend the function on a set of permutations paired with partitions and show that it satisfies a differential equation analog to the one of Lemma 3.1.3. Let us denote by  $\mathcal{P}_n$  the set of partition of  $\{1, \dots, n\}$  and by  $\leq$  the order on  $\mathcal{P}_n$  induced by inclusion. The maximal (resp. minimal) element of  $\mathcal{P}_n$  is  $\{\{1, \dots, n\}\}$  (resp.  $\{\{1\}, \{2\}, \dots, \{n\}\}$ ) and is denoted by  $1_n$  (resp.  $0_n$ ). If  $\pi$  and  $\mu$  belong to  $\mathcal{P}_n$ , we denote the smallest (resp. greatest) partition greater (resp. smaller) than  $\pi$  and  $\mu$  by  $\vee$  (resp.  $\wedge$ ). For any subset  $B \subset \{1, \dots, n\}$ , we denote the smallest partition including  $B$  by  $1_B$ . For any partition  $\pi$ , if  $\pi \leq 1_B$ , we denote by  $\pi|_B$  the partition of  $B$  induced by  $\pi$ . For any permutation  $\sigma$ , let  $\pi_\sigma \in \mathcal{P}_n$  be the partition whose elements are orbits of the action of  $\sigma$  on  $\{1, \dots, n\}$ .

3. Due to the repulsion between eigenvalues and to the rigidity of their configuration, one may prove for the Gaussian Unitary Ensemble (see [54, 21]) that the normalization is not the one of a usual central limit theorem for random i.i.d random sequences but the one that we will use here. To observe convergence of the empirical measure of eigenvalues and the fluctuations about its limit, the scaling is the same for the unitary Brownian motion  $(U_t)_{t \geq 0}$  or for its driving noise  $(K_t)_{t \geq 0}$ .

**Definition 3.1.5.** For any partition  $\pi$  of  $\{1, \dots, n\}$  and any permutation  $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ , the couple  $(\sigma, \pi)$  is called a partial permutation of  $\{1, \dots, n\}$  if  $\pi_\sigma \leq \pi$ . We denote the set of partial permutations of  $\{1, \dots, n\}$  by  $\mathcal{PS}_n$ .

Let us endow  $\mathbb{C}[\mathcal{PS}_n]$  with a structure of an algebra by setting for any  $(\alpha, \pi), (\beta, \nu) \in \mathcal{PS}_n$ ,

$$(\alpha, \pi) \cdot (\beta, \nu) = (\alpha \cdot \beta, \pi \vee \nu)$$

and extending this multiplication of monoid bilinearly. Let us extend the function  $\varphi_t$  to  $\mathcal{PS}_\infty$ . Recall that for any probability space  $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$ , the sequence of cumulant functions is the unique sequence  $(k_n)_{n \geq 1}$  of symmetric functions on  $L^\infty(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$  satisfying for any partition  $\mathcal{V} \in \mathcal{P}_n$  and any complex-valued bounded random variables  $X_1, \dots, X_n$ ,

$$\prod_{\{i_1, \dots, i_k\} \in \mathcal{V}} \mathbb{E}[X_{i_1} X_{i_2} \cdots X_{i_k}] = \sum_{\mathcal{W} \leq \mathcal{V}} \prod_{B \in \mathcal{W}} k_{\#B}(X_i, i \in B).$$

For example,  $k_2(X_1, X_2) = \mathbb{E}[X_1 X_2] - \mathbb{E}[X_1] \mathbb{E}[X_2]$  and

$$\begin{aligned} k_3(X_1, X_2, X_3) = & \mathbb{E}[X_1 X_2 X_3] - \mathbb{E}[X_1 X_2] \mathbb{E}[X_3] - \mathbb{E}[X_2 X_3] \mathbb{E}[X_1] \\ & - \mathbb{E}[X_1 X_3] \mathbb{E}[X_2] + 2\mathbb{E}[X_1] \mathbb{E}[X_2] \mathbb{E}[X_3]. \end{aligned}$$

For any partition  $\mathcal{V} \in \mathcal{P}_n$ , set

$$\mathbb{E}_{\mathcal{V}}[X_1 \cdots X_n] = \prod_{B \in \mathcal{V}} \mathbb{E}[\prod_{i \in B} X_i]$$

and

$$k_{\mathcal{V}}(X_1, \dots, X_n) = \prod_{B \in \mathcal{V}} k_B(X_i, i \in B).$$

We will also need to use relative cumulants. The *relative cumulant functions*  $(k_{\mathcal{V}, \mathcal{W}})_{\mathcal{V} \leq \mathcal{W}}$  is the unique sequence of functions on  $L^\infty(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$  indexed by ordered pair of partitions satisfying for any pair of partitions  $\mathcal{V} \leq \mathcal{U}$  of  $\{1, \dots, n\}$ ,

$$\mathbb{E}_{\mathcal{U}}[X_1 \cdots X_n] = \sum_{\mathcal{V} \leq \mathcal{W} \leq \mathcal{U}} \prod_{B \in \mathcal{W}} k_{\mathcal{V}|_B, 1_B}(X_i, i \in B).$$

For any pair of partitions  $\mathcal{V} \leq \mathcal{W}$ , let  $\mathcal{W}_{\mathcal{V}}$  be the partition of  $\mathcal{V}$  induced by  $\mathcal{W}$ . Then,

$$k_{\mathcal{V}, \mathcal{W}}(X_1, \dots, X_n) = k_{\mathcal{W}_{\mathcal{V}}}(\prod_{i \in B} X_i, B \in \mathcal{V})$$

For example,

$$k_{1_{\{1,2\}}, 1_3}(X_1, X_2, X_3) = \mathbb{E}[X_1 X_2 X_3] - \mathbb{E}[X_1 X_2] \mathbb{E}[X_3].$$

Note that cumulants and relative cumulants functions are multilinear and we will use the same notations for  $\text{End}((\mathbb{C}^N)^{\otimes n})$ -valued random variables. For example, if  $A, B$  are two random matrices,

$$k_2(A \otimes B) = \mathbb{E}[A \otimes B] - \mathbb{E}[A] \otimes \mathbb{E}[B].$$

**Lemma 3.1.6.** *If  $A_1, \dots, A_n$  are  $n$  random matrices in  $M_N(\mathbb{C})$ , then for any partial permutation  $(\sigma, \mathcal{V}) \in \mathcal{PS}_n$  and  $\mathcal{W} \geq \mathcal{V}$ ,*

$$\mathrm{Tr}(\sigma k_{\mathcal{V}, \mathcal{W}}(A_1 \otimes A_2 \otimes \dots \otimes A_n)) = \prod_{B \in \mathcal{W}} k_{\# \mathcal{V}|_B}(\mathrm{Tr}(\sigma|_C \bigotimes_{i \in C} A_i), C \in \mathcal{V}|_B).$$

*Proof.* Fix a partial permutation  $(\sigma, \mathcal{V}) \in \mathcal{PS}_n$ . For any  $\mathcal{W} \geq \mathcal{V}$ , denote by  $\mathcal{W}'$  the partition  $\mathcal{W}_{\mathcal{V}}$ . The mapping  $\mathcal{W} \mapsto \mathcal{W}'$  defines a bijection between partition larger than  $\mathcal{V}$  and partitions of  $\mathcal{V}$ . For any partition  $\mu$  of  $\mathcal{V}$ , denotes by  $\tilde{\mu}$  the partition of  $\mathcal{P}_n$  such that  $\tilde{\mu}' = \mu$ . For any partition  $\mu$  of  $\mathcal{V}$ , set

$$\tilde{k}_{\mu} = \mathrm{Tr}(\sigma k_{\tilde{\mu}}(A_1 \otimes \dots \otimes A_n)).$$

Then,  $\tilde{k}_{\mu} = \prod_{B \in \tilde{\mu}} \mathrm{Tr}(\sigma|_B k_{\#B}(\bigotimes_{i \in B} A_i))$  and for any partition  $\nu$  of  $\mathcal{V}$ ,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\nu}[\mathrm{Tr}(\sigma|_B \bigotimes_{i \in B} A_i), B \in \pi] &= \mathbb{E}_{\tilde{\nu}}[\mathrm{Tr}(\sigma A_1 \otimes \dots \otimes A_n)] \\ &= \sum_{\nu \leq \mathcal{W} \leq \tilde{\nu}} \mathrm{Tr}(\sigma k_{\mathcal{W}}(A_1 \otimes \dots \otimes A_n)) = \sum_{\mu \leq \nu} \tilde{k}_{\mu}. \end{aligned}$$

□

For any partial permutation  $(\sigma, \pi) \in \mathcal{PS}_n$ , set

$$\varphi_t^N(\sigma, \pi) = N^{2(\#\pi-1)} k_{\#\pi}(f_{\sigma|_B}, B \in \pi) = N^{2\#\pi-\#\sigma-2} \mathrm{Tr}(\sigma k_{\pi, 1_n}(U_t^{\otimes n})).$$

For example, for any permutation  $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ ,

$$\varphi_t^N(\sigma, 1_n) = \varphi_t^N(\sigma)$$

and if  $\sigma$  has  $m$  cycles of length  $l_1, \dots, l_m$ ,

$$\varphi_t^N(\sigma, \pi_{\sigma}) = N^{2(m-1)} k_m(f_{l_1}(U_t), \dots, f_{l_m}(U_t)).$$

The choice of normalization is hinted<sup>4</sup> by the case of partial permutations with at most two blocks, in which the normalization matches the scaling of the first order and of the fluctuations. It is also motivated by the two following lemmas. For any  $\pi \in \mathcal{P}_n$ , let us denote by  $\sim_{\pi}$  the equivalence relation on  $\{1, \dots, n\}$  induced by  $\pi$ .

**Lemma 3.1.7.** *For any partial permutation  $(\sigma, \pi) \in \mathcal{PS}_n$  and any partition  $\mathcal{W} \in \mathcal{P}_n$  such that  $\pi \leq \mathcal{W}$ ,*

$$e^{\frac{n}{2}t} k_{\pi, \mathcal{W}}(U_t^{\otimes n}) = \sum_{n \geq 0} \frac{(-t)^m}{N^m m!} \sum_{\substack{i_1 < j_1, \dots, i_m < j_m \\ 1_{\{i_1, j_1\}} \vee \dots \vee 1_{\{i_m, j_m\}} \vee \pi = \mathcal{W}}} (i_1 j_1) \cdots (i_m j_m).$$

What is more,

$$\frac{d}{dt} k_{\pi, \mathcal{W}}(U_t^{\otimes n}) = -\frac{n}{2} k_{\pi, \mathcal{W}}(U_t^{\otimes n}) - \frac{1}{N} \sum_{\substack{1 \leq i < j \leq n \\ i \sim_{\mathcal{W}} j}} (i j) k_{\pi \vee 1_{\{i, j\}}, \mathcal{W}}(U_t^{\otimes n}).$$

$$k_{\pi, \mathcal{W}}(U_0^{\otimes n}) = \delta_{\pi, \mathcal{W}} \mathrm{Id}.$$

---

4. The same quantity are introduced in [11] to study fluctuations of traces for Wigner and Wishart matrices.



*Proof.* Let us denote by  $S_m(\pi, \mathcal{W})$  the element of  $\mathbb{C}[\mathfrak{S}_n]$  appearing in the right-hand-side of the first formula, that is,

$$\sum_{\substack{i_1 < j_1, \dots, i_m < j_m \\ 1_{\{i_1, j_1\}} \vee \dots \vee 1_{\{i_m, j_m\}} \vee \pi = \mathcal{W}}} (i_1 j_1) \cdots (i_m j_m).$$

If the sequence  $i_1 < j_1, \dots, i_m < j_m$  contributes to the above sum, then for any  $k$ ,  $i_k$  and  $j_k$  belong to the same block of  $\mathcal{W}$ . Therefore, if  $\mathcal{W} = \{B_1, \dots, B_k\}$  and  $m_1, \dots, m_k \in \mathbb{N}^*$ , the family  $\{S_{m_i}(\pi|_{B_i}, 1_{B_i}), i \in \{1, \dots, k\}\}$  is commutative and  $S_m(\pi, \mathcal{W})$  satisfies

$$S_m(\pi, \mathcal{W}) = \sum_{\substack{m_1, \dots, m_k \geq 0 \\ m_1 + \dots + m_k = m}} \binom{m}{m_1 \ m_2 \ \dots \ m_k} \prod_{i=1}^k S_{m_i}(\pi|_{B_i}, 1_{B_i}). \quad (3.4)$$

The use of Lemma 3.1.4 yields that for any partitions  $\pi, \mathcal{V} \in \mathcal{P}_n$ , such that  $\pi \leq \mathcal{V}$ ,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\mathcal{V}}[U_t^{\otimes n}] &= \exp\left[-t\left(\frac{n}{2} + \frac{1}{N} \sum_{\substack{1 \leq i < j \leq n \\ i \sim_{\mathcal{V}} j}} (i j)\right)\right] \\ &= e^{-\frac{nt}{2}} \sum_{m \geq 0} \frac{(-t)^m}{N^m m!} \sum_{\pi \leq \mathcal{W} \leq \mathcal{V}} S_m(\pi, \mathcal{W}). \end{aligned}$$

The factorization equation (3.4) implies that

$$\mathbb{E}_{\mathcal{V}}[U_t^{\otimes n}] = \sum_{\pi \leq \mathcal{W} \leq \mathcal{V}} \prod_{B \in \mathcal{W}} \left( e^{-\frac{|B|t}{2}} \sum_{m \geq 0} \frac{(-t)^m}{N^m m!} S_m(\pi|_B, 1_B) \right)$$

and the first equation of the Lemma follows. The relations

$$S_{m+1}(\pi, \mathcal{W}) = \sum_{i \sim_{\pi} j} (i j) S_m(\pi \vee \{i, j\}, \mathcal{W}),$$

for any  $m \geq 1$ , yields the announced differential equation.  $\square$

Let us give to this another form to Lemma 3.1.7 which is an analog of Proposition 2.4. of [34]. Let  $(\sigma_t)_{t \geq 0}$  be the simple random walk on the Cayley graph of the symmetric group  $\mathfrak{S}_n$  spanned by all transpositions, with right multiplication occurring at a time of a Poisson process of rate  $\frac{n(n-1)}{2N}$ . The process  $(\sigma_t)_{t \geq 0}$  is the continuous-time Markov process on the discrete state space  $\mathfrak{S}_n$  such that for any permutation  $\sigma$  and any transposition  $\tau$ , the jump rate between  $\sigma$  and  $\sigma\tau$  is  $\frac{1}{N}$ . Let us denote by  $(\pi_t)_{t \geq 0}$  the random partition of  $\{1, \dots, n\}$ , such that at any jumping time  $T$  along a transposition  $(i j)$ ,  $\pi_{T+} = \pi_{T-} \vee \pi_{(i j)}$ . For any partial permutation  $(\sigma, \pi)$ , set

$$p_t(\sigma, \pi) = \text{Tr}(\sigma k_{\pi, 1_n}(U_t))$$

**Lemma 3.1.8.bis** *Let  $(\sigma_t)_{t \geq 0}$  a simple random walk on  $\mathfrak{S}_n$  as described above and independent of  $(U_t)_{t \geq 0}$ . Then  $e^{\frac{n(n-1+N)}{2N}t} p_t(\sigma_t, \pi_t)$  is a martingale and for any  $t \geq 0$ ,*

$$e^{\frac{n(n-1+N)}{2N}t} \mathbb{E}[p_t(\sigma_t, \pi_t)] = N^{\#\sigma_0} \mathbf{1}_{\pi_0 = 1_n}.$$

*Proof.* The generator  $\Delta_{\mathcal{PS}_n}$  of the Markov chain  $((\sigma_t, \pi_t))_{t \geq 0}$  satisfies for any function  $p$  on  $\mathcal{PS}_n$ , and  $(\sigma, \pi) \in \mathcal{S}_n$ ,

$$\Delta_{\mathcal{PS}_n} p(\sigma) = -\frac{n(n-1)}{2N} p(\sigma, \pi) + \frac{1}{N} \sum_{1 \leq i < j \leq n} p(\sigma(i \ j), \pi \vee 1_{\{i,j\}}).$$

The Lemma 3.1.7 implies that  $\frac{d}{dt} p_t(\sigma, \pi) = -\frac{nN+n(n-1)}{2N} p_t(\sigma, \pi) - \Delta_{\mathcal{PS}_n}(p_t)(\sigma, \pi)$  and the result follows.  $\square$

Define a graph on  $\mathcal{PS}_n$ , stating that  $(a, \alpha)$  and  $(b, \beta)$  are neighbours if and only if there exists  $1 \leq i < j$  such that  $(a(i \ j), \alpha \vee 1_{\{i,j\}}) = (b, \beta)$  or vice-versa  $(b(i \ j), \beta \vee 1_{\{i,j\}}) = (a, \alpha)$ .

**Lemma 3.1.9.** *For any partial permutation  $(\sigma, \pi) \in \mathcal{PS}_n$ , set*

$$|(\sigma, \pi)| = 2(n - \#\pi) + \#\sigma - n.$$

*The graph distance between  $(\sigma, \pi)$  and  $(\text{Id}, 1_n)$  is*

$$|(\text{Id}, 1_n)| - |(\sigma, \pi)| = 2(\#\pi - 1) + n - \#\sigma.$$

*Proof.* For any partial permutation  $(\sigma, \pi)$  and any transposition  $(i \ j)$ , such that  $(\sigma, \pi)$  and  $(\sigma(i \ j), \pi \vee 1_{\{i,j\}})$  are two successive elements of a geodesic path from  $(\sigma, \pi)$  to  $(\text{Id}, 1_n)$ , then  $i, j$  belongs either to the same cycle of  $\sigma$  or to two different blocks of  $\pi$ . What is more, for any partial permutation  $(\sigma, \pi)$  and any transposition  $(i \ j)$

$$|(\sigma(i \ j), \pi \vee 1_{\{i,j\}})| - |(\sigma, \pi)| = 2(\#\pi - \#\pi \vee \{i, j\}) + \#\sigma(i \ j) - \#\sigma \in \{1, -1\}.$$

It is equal to 1 if  $i, j$  belongs to the same cycle of  $\sigma$  or to two different blocks of  $\pi$  and to  $-1$  if  $i, j$  belongs to two different cycles of  $\sigma$  but to the same block of  $\pi$ .  $\square$

For any partial permutation  $(\sigma, \pi) \in \mathcal{PS}_n$ , the above scaling is

$$\varphi_t(\sigma, \pi) = N^{n-2-|(\sigma, \pi)|} \text{Tr} \left( \sigma k_{\pi, \mathcal{W}}(U_t^{\otimes n}) \right).$$

Lemma 3.1.7 implies that

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \varphi_t^N(\sigma, \pi) &= -\frac{n}{2} \varphi_t^N(\sigma, \pi) - \sum_{1 \leq i < j \leq n} N^{2(\#\pi - \#\pi \vee 1_{\{i,j\}}) + \#\sigma(i \ j) - \#\sigma - 1} \varphi_t^N(\sigma(i \ j), \pi \vee 1_{\{i,j\}}). \\ \varphi_0^N(\sigma, \pi) &= \delta_{\pi, 1_n}. \end{aligned}$$

For any partial permutation  $(\sigma, \pi) \in \mathcal{PS}_n$ , the quantity

$$2(\#\pi - \#\pi \vee 1_{\{i,j\}}) + \#\sigma(i \ j) - \#\sigma - 1 = |(\sigma(i \ j), \pi \vee 1_{\{i,j\}})| - |(\sigma, \pi)| - 1$$

is either 0 or  $-2$ . Denote by  $L_N$  the linear operator on the space  $\mathbb{C}[\mathcal{PS}_n]^*$  of functions on partial permutations defined in the following way : for any function  $\phi \in \mathbb{C}[\mathcal{PS}_n]^*$ ,

$$L_N(\phi)(\sigma, \pi) = -\frac{n}{2} \phi(\sigma, \pi) - \sum_{1 \leq i < j \leq n} N^{2(\#\pi \vee \pi(i \ j) - \#\pi) + \#\sigma(i \ j) - \#\sigma - 1} \phi(\sigma(i \ j), \pi \vee \pi(i \ j)).$$

For any partition  $\pi \in \mathcal{P}_n$  and any  $(\sigma, \mathcal{V}) \in \mathcal{PS}_n$ , set  $\mathbf{1}_\pi(\sigma, \mathcal{V}) = \delta_{\pi, \mathcal{V}}$ . According to Lemma 3.1.7, for any  $t \geq 0$ ,

$$\varphi_t^N = e^{tL_N} \mathbf{1}_{1_n}.$$

Note that the operator  $L_N$  converges as  $N \rightarrow \infty$ . Let us denote by  $L$  its limit. Therefore, for any  $t \geq 0$ , the function  $\varphi_t^N$  converges as  $N \rightarrow \infty$ . Let us set

$$\varphi_t = \lim_{N \rightarrow \infty} \varphi_t^N = e^{tL} \mathbf{1}_{1_n}.$$

The function  $\varphi_t$  is thus the solution of the following differential system : for any partial permutation  $(\sigma, \pi) \in \mathcal{PS}_n$ ,

$$\begin{aligned} \varphi_0(\sigma, \pi) &= \delta_{\pi, 1_n}, \\ \frac{d}{dt} \varphi_t(\sigma, \pi) &= -\frac{n}{2} \varphi_t(\sigma, \pi) - \sum \varphi_t(\sigma(i\ j), \pi \vee 1_{\{i, j\}}), \end{aligned}$$

where the sum is indexed by transpositions  $(i\ j)$  such that  $\#\sigma(i\ j) - 2\#\pi \vee 1_{\{i, j\}} = 1 + \#\sigma - 2\#\pi$ . Such a transposition splits a cycle of  $\sigma$  or joins two blocks of  $\pi$ .

A consequence of the above arguments is that for any permutation with  $m$  cycles of length  $l_1, \dots, l_m$ , the sequence  $\varphi_t^N(\sigma, \pi_\sigma) = N^{m-2} k_m^N(\text{Tr}(U_t^{l_1}), \dots, \text{Tr}(U_t^{l_m}))$  converges as  $N \rightarrow \infty$ . In particular, for any  $m \geq 3$ ,  $k_m^N(\text{Tr}(U_t^{l_1}), \dots, \text{Tr}(U_t^{l_m})) \rightarrow 0$ . To prove that the random variables  $(\text{Tr}(U_t^l) - \mathbb{E}[\text{Tr}(U_t^l)])_{l \geq 0}$  converges in distribution to a Gaussian vector, we would like to prove the same result for any sequence of integers  $l_1, \dots, l_m$  with arbitrary signs. To that purpose, we need a slight generalization of the above construction.

**Mixed moments :** For any positive integer  $n, m$ , let us denote by  $\mathfrak{S}_{-n, m}$  the set of matchings of  $\{-n, \dots, -1\} \cup \{1, \dots, m\} \times \{-1, 1\}$  such that  $(a, \varepsilon_a)$  and  $(b, \varepsilon_b)$  are disconnected if  $\varepsilon_a \varepsilon_b ab > 0$ . We call elements of  $\mathfrak{S}_{-n, m}$  *walled Brauer diagrams*. Let us further denote by  $\mathcal{B}_{-n, m}$  the vector space with canonical bases indexed by  $\mathfrak{S}_{-n, m}$ . For any pair of matchings  $\alpha$  and  $\beta$  of  $\mathfrak{S}_{-n, m}$ , the concatenation of the diagram of  $\alpha$  above the one of  $\beta$  yields a matching  $\mathfrak{S}_{-n, m}$  and loops in the middle of this new diagram. Let us denote by  $\alpha \circ \beta$  the matching of  $\mathfrak{S}_{-n, m}$  and  $l(a, b)$  the number of loops induced by this construction. For any integer  $N$ , we endow  $\mathcal{B}_{-n, m}$  with an algebra structure by setting for any matching  $\alpha$  and  $\beta$  in  $\mathfrak{S}_{-n, m}$ ,

$$\alpha \cdot \beta = N^{l(a, b)} \alpha \circ \beta$$

and by extending linearly this multiplication. We shall denote by  $\mathcal{B}_{-n, m}(N)$  this algebra. It is called the *walled Brauer algebra*. For any pair of integers  $i, j$  such that  $-n \leq i < 0 < j \leq m$ , let  $\langle i\ j \rangle \in \mathfrak{S}_{-n, m}$  be the matching  $\{\{(i, -1), (j, -1)\}, \{(i, 1), (j, 1)\}\} \cup_{\substack{-n < l < m \\ l \notin \{i, 0, j\}}} \{(l, -1), (l, 1)\}$ .

For any Brauer diagram  $b \in \mathfrak{S}_{-n, m}$ , denote by  $\pi_b$  the partition of  $\{-n, \dots, -1\} \cup \{1, \dots, m\}$  obtained from  $b$  by identification of  $(i, -1)$  with  $(i, 1)$  for any  $i \in \{-n, \dots, -1\} \cup \{1, \dots, m\}$ .

**Definition 3.1.10.** For any matching  $b \in \mathfrak{S}_{-n, m}$  and any partition  $\pi$  of  $\{-n, \dots, -1\} \cup \{1, \dots, m\}$ , we call the pair  $(b, \pi)$  a partial Brauer diagram if the  $\pi_b \leq \pi$ . We denote the set of partial Brauer diagram element by  $\mathcal{PS}_{-n, m}$ . Similarly to the case of the partial permutations, we define for any integer  $N$ , an algebra  $\mathcal{PB}_{-n, m}(N)$ .

For any  $b \in \mathfrak{S}_{-n,m}$ , we make an abuse of notation by denoting by the same letter  $b$  the Brauer diagram and the morphism of  $\text{End}((\mathbb{C}^N)^{\otimes n+m})$  whose matrix in the canonical basis is

$$\sum E_{i_{(-n,1)}, i_{(-n,-1)}} \otimes \cdots \otimes E_{i_{(-1,1)}, i_{(-1,-1)}} \otimes E_{i_{(1,1)}, i_{(1,-1)}} \otimes \cdots \otimes E_{i_{(m,1)}, i_{(m,-1)}},$$

where the sum is over  $[N]$ -valued index functions  $i$  on  $\{-n, \dots, -1\} \cup \{1, \dots, m\} \times \{-1, 1\}$ , that are constant on blocks of  $b$ . Let us denote by  $\#b$  the number of blocks of the partition of  $\{-n, \dots, -1\} \cup \{1, \dots, m\}$  induced by  $b$  and set for any  $U \in \text{U}(N)$ ,

$$f_b(U) = N^{-\#b} \text{Tr}(b \bar{U}^{\otimes n} \otimes U^{\otimes m}).$$

Let us define  $\varphi_t^N$  the linear form on the partial Brauer algebra  $\mathcal{PB}_{-n,m}$  by setting for any partial Brauer diagram  $(b, \pi) \in \mathcal{PS}_{-n,m}$ ,

$$F_t^N(b, \pi) = N^{2(\#\pi-1)} k_{\#\pi} (f_{b|_B}, B \in \pi) = N^{2\#\pi-\#b-2} \text{Tr} \left( k_{\pi, 1_n} (b \bar{U}_t^{\otimes n} \otimes U_t^{\otimes m}) \right).$$

For any pair of distinct non-zero integers  $i, j$ , let us denote by  $\tau_{i,j}$  the element of  $\mathcal{B}_{-n,m}$  that is  $(i \ j)$  if  $i \cdot j > 0$  and  $\langle i \ j \rangle$  if  $i \cdot j < 0$ . Using Lemma 3.1.4, the Lemma 3.1.7 admits the following generalization.

**Lemma 3.1.11.** *a) For any partitions  $\pi \leq \mathcal{W}$  of  $\{-n, \dots, -1\} \cup \{1, \dots, m\}$ ,*

$$e^{\frac{n+m}{2}t} k_{\pi, \mathcal{W}} (\bar{U}_t^{\otimes n} \otimes U_t^{\otimes m}) = \sum_{p \geq 0} \frac{(-t)^p}{N^p p!} \sum_{\substack{i_1 < j_1, \dots, i_p < j_p \\ 1_{\{i_1, j_1\}} \vee \dots \vee 1_{\{i_p, j_p\}} \vee \pi = \mathcal{W}}} \tau_{i_1, j_1} \cdots \tau_{i_p, j_p}$$

*and for any partial Brauer diagram  $(b, \pi) \in \mathcal{PS}_{-n,m}$ ,*

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \varphi_t^N(b, \pi) &= -\frac{n+m}{2} \varphi_t^N(\sigma, \pi) - \sum_{i < j: i \cdot j > 0} N^{2(\#\pi - \#\pi \vee \{i, j\}) + \#b(i \ j) - \#b - 1} \varphi_t^N(b(i \ j), \pi \vee 1_{\{i, j\}}) \\ &\quad + \sum_{i < j: i \cdot j < 0} N^{2(\#\pi - \#\pi \vee \{i, j\}) + \#b \circ \langle i \ j \rangle + l(b, \langle i \ j \rangle) - \#b - 1} \varphi_t^N(b \circ \langle i \ j \rangle, \pi \vee 1_{\{i, j\}}), \\ \varphi_0^N(b, \pi) &= \delta_{\pi, 1_n}. \end{aligned}$$

*b) For any  $i, j$ , the integer  $2(\#\pi - \#\pi \vee 1_{\{i, j\}}) + \#b \circ \langle i \ j \rangle + l(b, \langle i \ j \rangle) - \#b - 1$ , if  $i \cdot j < 0$  or  $2(\#\pi - \#\pi \vee 1_{\{i, j\}}) + \#b(i \ j) - \#b - 1$ , if  $i \cdot j > 0$ , takes the value 0 or  $-2$ .*

*Proof.* a) The proof of Lemma 3.1.7 can be applied verbatim.

b) To any walled Brauer diagram  $b \in \mathfrak{S}_{-n,m}$ , let us consider the permutation  $\sigma_b$  associated to the image of  $b$  by the application of  $\mathbb{Z} \times \{-1, 1\}$  that maps  $(x, \varepsilon)$  to  $(x, -\text{sign}(x)\varepsilon)$ . Then,  $\#\sigma_b = \#b$  and if  $i, j$  are two integers of the same sign,  $\sigma_{b(i \ j)}$  is equal to  $b(i \ j)$  if  $i < 0$  and to  $(i \ j)b$  if  $i > 0$ . What is more, for any pair  $i, j \in \{-n, \dots, -1\} \cup \{1, \dots, m\}$ , with  $i < 0 < j$ , if  $j = \sigma_b(i)$ , then  $\{(i, 1), (j, 1)\}$  belongs to  $b$ ,  $l(\langle i \ j \rangle, b) = 1$  and  $\sigma_{b \circ \langle i \ j \rangle} = \sigma_b$ , otherwise  $\sigma_{b \circ \langle i \ j \rangle} = \sigma_b(\sigma_b(i \ j))$ . For any  $i, j$ , the integer  $2(\#\pi - \#\pi \vee 1_{\{i, j\}}) + \#\sigma_{b \circ \langle i \ j \rangle} + l(b, \langle i \ j \rangle) - \#\sigma_b$ , if  $i \cdot j < 0$  or  $2(\#\pi - \#\pi \vee 1_{\{i, j\}}) + \#\sigma_{b(i \ j)} - \#\sigma_b$ , if  $i \cdot j > 0$ , takes the value 1, if  $i$  and  $j$  belong to two different blocks of  $\pi$  or to the same block of  $\pi_b$ . Indeed, in the second case, the concatenation of  $b$  with  $\tau_{i,j}$  either splits a cycle of  $\sigma_b$  or yields a loop, that is  $l(b, \tau_{i,j}) = 1$ . If  $i$  and  $j$  are in the same block of  $\pi$  but in two different blocks of  $\pi_b$ , then this number is  $-1$ .  $\square$

Let us define  $L^N$  the linear operator on the space of function on  $\mathcal{PS}_{-n,m}$  setting for any partial Brauer diagram  $(b, \pi) \in \mathcal{PS}_{-n,m}$ , and any function  $\phi$  on  $\mathcal{PS}_{-n,m}$ ,

$$\begin{aligned} L^N \phi(\sigma, \pi) = & -\frac{n+m}{2} \phi(\sigma, \pi) - \sum_{i < j: i, j > 0} N^{2(\#\pi - \#\pi \vee 1_{\{i,j\}}) + \#b(i,j) - \#b-1} \phi(b(i,j), \pi \vee 1_{\{i,j\}}) \\ & + \sum_{i < j: i, j < 0} N^{2(\#\pi - \#\pi \vee 1_{\{i,j\}}) + \#b \circ \langle i, j \rangle + l(b, \langle i, j \rangle) - \#b-1} \phi(b \circ \langle i, j \rangle, \pi \vee 1_{\{i,j\}}). \end{aligned}$$

The linear operator  $L^N$  converges as  $N \rightarrow \infty$  towards a linear operator  $L$  that is defined as follows : for any partial Brauer diagram  $(b, \pi) \in \mathcal{PS}_{-n,m}$  and any function  $\phi$  on  $\mathcal{PS}_{-n,m}$ ,

$$\begin{aligned} L(\phi)(b, \pi) = & -\frac{n+m}{2} \phi(b, \pi) - \sum \phi(b(i,j), \pi \vee 1_{\{i,j\}}) \\ & + \sum \phi(b \circ \langle i, j \rangle, \pi \vee 1_{\{i,j\}}), \end{aligned} \quad (**)$$

the first sum is over pairs  $i < j$  such that  $i, j > 0$  and  $2\#\pi + \#b(i,j) = \#b + 2\#\pi \vee \pi_{(i,j)} + 1$ . The second one is over pairs  $i < j$  such that  $i, j < 0$  and  $2\#\pi + \#b \circ \langle i, j \rangle + l(b, \langle i, j \rangle) = \#b + 2\#\pi \vee \pi_{(i,j)} + 1$ . Similarly to the case of partial permutations, the following proposition follows.

**Proposition 3.1.12.** *The sequence of function  $\varphi_t^N$  on  $\mathcal{PS}_{-n,m}$  converges towards a function  $\varphi_t$  that is given by*

$$\varphi_t = e^{tL} \mathbf{1}_{\{-n, \dots, -1\} \cup \{1, \dots, m\}}.$$

**Corollary 3.1.13.** *i) For any sequence of relative integers  $l_1, \dots, l_m$ , the sequence of cumulants  $N^{m-2} k_m(\text{Tr}(U_{N,t}^{l_1}), \dots, \text{Tr}(U_{N,t}^{l_m}))$  converges. Let us denote by  $k_{m,t}(l_1, \dots, l_m)$  its limit.*

*ii) The random vector  $(\text{Tr}(U_{N,t}^{l_i}))_{i \in \mathbb{Z}}$  converges towards a Gaussian vector with covariance matrix  $(k_{2,t}(l, m))_{l, m \in \mathbb{Z}}$ .*

According to the terminology of [11], the distribution of higher order of a marginal of the unitary Brownian motions converges as  $N \rightarrow \infty$ .

**Covariances generating series :** We shall now give an expression for the generating function associated to the covariance matrix as we did for the generating function of moments of  $\mu_t$ . Let us set

$$G_t^\pm(x, y) = \sum_{n, m \geq 1} e^{\frac{n+m}{2}t} k_{2,t}(\pm n, m) \frac{x^n y^m}{nm}.$$

**Theorem 3.1.14.** *i) For any  $t \geq 0$ ,*

$$G_t^+(x, y) = \log\left(\frac{ye^{tL_t(x)} - xe^{tL_t(y)}}{y - x}\right) \in \mathbb{C}[[x, y]]$$

and

$$G_t^-(x, y) = \log\left(\frac{1 - xye^{-t(L_t(x) + L_t(y))}}{1 - xye^t}\right) \in \mathbb{C}[[x, y]].$$

*ii) For any  $n, m \in \mathbb{Z}^*$ , as  $t \rightarrow \infty$ ,*

$$k_t(n, m) \rightarrow \frac{1}{|n|} \delta_{n, -m}.$$

*Proof.* i) For any pair of positive integers  $n, m$ , the proposition 3.1.12 and the formula (\*\*) applied to the partial permutation  $((1 \cdots n) \times (1 \cdots m), \{\{1, \dots, n\}, \{n+1, \dots, n+m\}\})$  and the partial Brauer diagram  $((-n \cdots -1) \times (1 \cdots m), \{\{-n, \dots, -1\}, \{1, \dots, m\}\})$  yield that

$$\begin{aligned} \partial_t k_{2,t}(n, m) = & -\frac{n+m}{2} k_{2,t}(n, m) - nm \mu_{t,n+m} \\ & - n \sum_{p=1}^{n-1} \mu_{t,p} k_{2,t}(n-p, m) - m \sum_{q=1}^{m-1} \mu_{t,q} k_{2,t}(n, m-q) \end{aligned} \quad (+)$$

and

$$\begin{aligned} \partial_t k_{2,t}(-n, m) = & -\frac{n+m}{2} k_{2,t}(-n, m) + nm \mu_{t,m-n} \\ & - n \sum_{p=1}^{n-1} \mu_{t,p} k_{2,t}(-n+p, m) - m \sum_{q=1}^{m-1} \mu_{t,q} k_{2,t}(-n, m-q). \end{aligned} \quad (-)$$

Remark that

$$\sum_{n,m \geq 1} e^{\frac{n+m}{2}t} \mu_{t,n+m} x^n y^m = \frac{yL_t(x) - xL_t(y)}{x-y}$$

and

$$\sum_{n,m \geq 1} e^{\frac{m-n}{2}t} \mu_{t,m-n} x^n y^m = \frac{xy(2 + L_t(y) + L_t(xe^{-t}))}{1-xy}.$$

The pair of equations (+) and (-) yields that

$$\partial_t G_t^\pm(x, y) = \phi_t^\pm(x, y) - xL_t(x)\partial_x G_t^+(x, y) - yL_t(y)\partial_y G_t^+(x, y), \quad (3.5)$$

where

$$\phi_t^+(x, y) = \sum_{n,m \geq 1} e^{\frac{n+m}{2}t} \mu_{t,n+m} x^n y^m = \frac{yL_t(x) - xL_t(y)}{x-y}$$

and

$$\begin{aligned} \phi_t^-(x, y) &= \sum_{m,n \geq 1} e^{\frac{n+m}{2}t} \mu_{t,m-n} x^n y^m \\ &= \sum_{m>n \geq 1} e^{\frac{m-n}{2}t} \mu_{t,m-n} (e^t x)^n y^m + \sum_{n>m \geq 1} e^{\frac{n-m}{2}t} \mu_{t,m-n} x^n (e^t y)^m + \sum_{n \geq 1} (e^t xy)^n \\ &= \frac{e^t xy(L(y) + L(x) + 1)}{1 - e^t xy}. \end{aligned}$$

Let us set

$$\Phi_t^\pm(x, y) = G_t^\pm(f_t(x), f_t(y)).$$

Then the equation (3.3) implies that

$$\partial_t \Phi_t^\pm(x, y) = \phi_t^\pm(x, y),$$

that is,

$$\partial_t \Phi_t^+(x, y) = \frac{xf_t(y) - yf_t(x)}{f_t(y) - f_t(x)} = x + y - \frac{yf_t(y) - xf_t(x)}{f_t(y) - f_t(x)}$$

and

$$\partial_t \Phi_t^-(x, y) = \frac{e^t f_t(x) f_t(y) (1 + x + y)}{1 - e^t f_t(x) f_t(y)}.$$

What is more,

$$\Phi_0^\pm = 0.$$

It follows that

$$\Phi_t^+(x, y) = \log \left( \frac{f_t(y)e^{tx} - f_t(x)e^{ty}}{f_t(y) - f_t(x)} \right)$$

and

$$\Phi_t^-(x, y) = \log \left( \frac{1 - f_t(x)f_t(y)e^{-t(x+y)}}{1 - e^t f_t(x)f_t(y)} \right).$$

This pair of equations is equivalent to the one for  $G^+$  and  $G^-$  that we are looking for.

ii) For any  $n \in \mathbb{N}^*$ , as  $t \rightarrow \infty$ ,  $t\mu_{t,n} \rightarrow 0$ . It follows that as  $t \rightarrow \infty$ ,  $G_t^+(e^{-t}x, e^{-t}y) \rightarrow 0$  and  $G_t^-(e^{-t}x, e^{-t}y) \rightarrow \log(\frac{1}{1-xy})$ , where both convergences are in  $\mathbb{C}[[x, y]]$ , endowed with the product topology.  $\square$

## 3.2 Words in free Brownian motions

We shall extend the result of Proposition 3.1.12 to the case of traces of words in several independent unitary Brownian motions. Let us denote by  $W_q$  the monoid of words using  $2q$  letters  $x_1, \dots, x_q, x_1^{-1}, \dots, x_q^{-1}$ . If  $w$  is a word in  $W_q$ ,  $w$  writes down  $x_{i_1}^{\varepsilon_1} \dots x_{i_n}^{\varepsilon_n}$ , with  $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n \in \{-1, 1\}$ , we call  $n$  the length of  $w$  and denote it by  $\ell(w)$ . For any  $p \in \{1, \dots, n\}$ , we denote by  $w_p$  its  $p^{\text{th}}$  letter  $x_{i_p}^{\varepsilon_p}$  and for any  $k \in \{1, \dots, q\}$ , we set  $n_w^\pm(k) = \#\{r \in \{1, \dots, n\} : w_r = x_k^\pm\}$  and  $\bar{n}_w(k) = n_w^+(k) + n_w^-(k)$ . For any matrices  $A_1, \dots, A_q$  in  $GL_N(\mathbb{C})$ , let us set

$$w^\otimes(A_1, \dots, A_q) = A_{i_1}^{\varepsilon_1} \otimes \dots \otimes A_{i_n}^{\varepsilon_n} \in M_N(\mathbb{C})^{\otimes n}$$

and

$$w(A_1, \dots, A_q) = A_{i_1}^{\varepsilon_1} \dots A_{i_n}^{\varepsilon_n} \in GL_N(\mathbb{C}).$$

Let  $t \in \mathbb{R}_+^q$  be a vector of positive real numbers and let  $U_{1,t_1}, \dots, U_{q,t_q}$  be  $q$  independent unitary Brownian motions. Set for any word  $w$ ,

$$w_t^\otimes = w^\otimes(U_{1,t_1}, \dots, U_{q,t_q}).$$

For any word  $w$  of length  $n$  and  $(\sigma, \pi)$  a partial permutation of  $\mathcal{PS}_n$ , we shall consider

$$\varphi_t^w(\sigma, \pi) = N^{2\#\pi - \#\sigma - 2} k_{\#\pi}(\text{Tr}(\sigma|_B(w_t^\otimes)_B), B \in \pi) = N^{2\#\pi - \#\sigma - 2} \text{Tr}(\sigma k_{\pi, 1_n}(w_t^\otimes)).$$

To start our analysis, we need a generalization of Lemma 3.1.7. Though, unlike the case of a single Brownian motion, using Itô formula for  $w_t$  yields operator on  $M_N((\mathbb{C}^N)^{\otimes n})$  that are not anymore multiplication on the right and on the left. Therefore, the differential system satisfied by the function  $\varphi_t^w$  on  $\mathcal{PS}_n$  won't be expressed with respect to an operator of convolution in

$\mathcal{PS}_n$  as in the case with a single matrix. Instead, we need to introduce the following notations. For any  $i \in \{1, \dots, n\}$ , let  $\theta_i$  be the  $\mathbb{C}$ -linear involution of  $M_N((\mathbb{C}^N)^{\otimes n})$

$$\begin{aligned} M_N((\mathbb{C}^N)^{\otimes n}) &\longrightarrow M_N((\mathbb{C}^N)^{\otimes n}) \\ A_1 \otimes \dots \otimes A_n &\longmapsto A_1 \otimes \dots \otimes A_i^t \otimes \dots \otimes A_n. \end{aligned}$$

Define for any pair of distinct integers  $i, j \in \{1, \dots, n\}$  the operator  $T_{i,j}$ , acting on  $\text{End}((\mathbb{C}^N)^{\otimes n})$  as follows. Fix a tensor  $M \in \text{End}((\mathbb{C}^N)^{\otimes n})$  and set

$$T_{i,j}^\varepsilon(M) = \begin{cases} M(i, j) & , \text{ if } \varepsilon_i = \varepsilon_j = 1 \\ (i, j)M & , \text{ if } \varepsilon_i = \varepsilon_j = -1 \\ \theta_i \circ \theta_j (\theta_i \circ \theta_j (M) \langle i, j \rangle) & , \text{ if } \varepsilon_i = -\varepsilon_j = 1 \\ \theta_i \circ \theta_j (\langle i, j \rangle \theta_i \circ \theta_j (M)) & , \text{ if } \varepsilon_i = -\varepsilon_j = -1. \end{cases} \quad (3.6)$$

The Lemma 3.1.3 yields that for any  $i \in \{1, \dots, n\}$ ,

$$\frac{d}{dt_k} \mathbb{E}[w_t^\otimes] = - \left( \frac{\bar{n}_w(k)}{2} + \sum_{\substack{i \neq j \\ w_i = w_j = k}} \varepsilon_i \varepsilon_j T_{i,j}^\varepsilon \right) \cdot \mathbb{E}[w_t^\otimes].$$

Let us stress that if  $M = w^\otimes(A_1, \dots, A_q)$ , with  $A_1, \dots, A_q \in \text{U}(N)$  and  $w_i = w_j^\pm$ , then  $\theta_i \circ \theta_j(w^\otimes(A))$  commutes with  $(i, j)$ , if  $\varepsilon_i \varepsilon_j = 1$  and  $\langle i, j \rangle$ , if  $\varepsilon_i \varepsilon_j = -1$ . Then,  $T_{i,j}^\varepsilon w^\otimes(A_1, \dots, A_q) = T_{i,j}^{-\varepsilon} w^\otimes(A_1, \dots, A_q)$  and for any  $B \in M_N((\mathbb{C}^N)^{\otimes n})$ ,

$$\text{Tr}(BT_{i,j}^\varepsilon(w^\otimes(A_1, \dots, A_q))) = \text{Tr}(T_{i,j}^\varepsilon(B)w^\otimes(A_1, \dots, A_q)).$$

For any  $k \in \{1, \dots, n\}$ , the last two equations yield that

$$\frac{d}{dt_k} \mathbb{E}[\text{Tr}(Bw_t^\otimes)] = -\mathbb{E} \left[ \text{Tr} \left( \left( \frac{\bar{n}_w(k)}{2} + \sum_{\substack{i \neq j \\ w_i = w_j = k}} \varepsilon_i \varepsilon_j T_{i,j}^{\pm \varepsilon} \right) (B) w_t^\otimes \right) \right]. \quad (3.7)$$

Besides, the operators  $(T_{i,j}^\varepsilon)_{1 \leq i, j \leq n}$  preserve the sub-vector space of  $\text{End}((\mathbb{C}^N)^{\otimes n})$  spanned by permutations of tensors in the following way. For any permutation  $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ , consider the permutations  $T_{i,j}^{+,+}(\sigma) = \sigma(i, j)$ ,  $T_{i,j}^{-,-}(\sigma) = (i, j)\sigma$  and  $T_{i,j}^{+,-}(\sigma) \in \mathfrak{S}_n$  defined by  $T_{i,j}^{+,-}(\sigma)|_{\{i, \sigma^{-1}(j)\}^c} = \sigma|_{\{i, \sigma^{-1}(j)\}^c}$ ,  $T_{i,j}^{+,-}(\sigma)(i) = j$  and  $T_{i,j}^{+,-}(\sigma)(\sigma^{-1}(j)) = \sigma(i)$ . Let us set further  $T_{i,j}^{-,+} = T_{j,i}^{+,-}$ . Then, for any  $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ , the elements of  $\text{End}((\mathbb{C}^N)^{\otimes n})$  associated to  $\sigma$  and  $T_{i,j}^{\varepsilon_i, \varepsilon_j}(\sigma)$  satisfies

$$T_{i,j}(\sigma) = N^{\delta_{\sigma(i),j}} T_{i,j}^{\varepsilon_i, \varepsilon_j}(\sigma).$$

If  $\sigma(i) = j$ , we shall say that  $T_{i,j}^{+,-}$  creates a loop in  $\sigma$ .

Now, let us set for any partial permutation  $(\sigma, \pi) \in \mathcal{PS}_n$ ,

$$T_{i,j}^{\dots}((\sigma, \pi)) = (T_{i,j}^{\dots}(\sigma), \pi \vee 1_{i,j}).$$

With these notations, the proof of Lemma 3.1.7 is easily generalized to this new setting and yields the following.



**Lemma 3.2.1.** *For any word  $w$  of length  $n$  in  $W_q$ , and any partial permutation  $(\sigma, \pi) \in \mathcal{PS}_n$  and  $\mathcal{W}$  a partition of  $\mathcal{P}_n$  such that  $\pi \leq \mathcal{W}$ ,*

$$e^{\frac{1}{2} \sum_{k=1}^q \bar{n}_w(k) t_k} \text{Tr}(\sigma k_{\pi, \mathcal{W}}(w_t^\otimes)) = \sum_{m \geq 0} \frac{(-1)^m}{N^m m!} \sum \varepsilon_{i_1} \varepsilon_{j_1} \cdots \varepsilon_{i_m} \varepsilon_{j_m} t_{w_{i_1}} \cdots t_{w_{i_m}} N^{l_{i_1, j_1, \dots, i_m, j_m}} \text{Tr}(T_{i_m, j_m}^{\varepsilon_{i_1}, \varepsilon_{j_1}} \cdots T_{i_m, j_m}^{\varepsilon_{i_m}, \varepsilon_{j_m}}(\sigma)),$$

where  $l_{i_1, j_1, \dots, i_m, j_m}(\sigma)$  is equal to  $\#\{p \in \{1, \dots, m\} : T_{i_{p-1}, j_{p-1}}^{\varepsilon_{i_{p-1}}, \varepsilon_{j_{p-1}}} \cdots T_{i_1, j_1}^{\varepsilon_{i_1}, \varepsilon_{j_1}}(\sigma)(i_p) = j_p\}$  and the second sum is over pairs  $i_1 < j_1, \dots, i_m < j_m$  of integers in  $\{1, \dots, n\}$ , such that  $w_{i_k} = w_{j_k}$  and  $1_{\{i_1, j_1\}} \vee \dots \vee 1_{\{i_m, j_m\}} \vee \pi = \mathcal{W}$ . The functions  $(\varphi_t(\sigma, \pi))_{(\sigma, \pi) \in \mathcal{PS}_n}$  satisfy the following differential system. For any  $k \in \{1, \dots, q\}$ ,

$$\begin{cases} \partial_{t_k} \varphi_t^w(\sigma, \pi) = -\frac{\bar{n}_w(k)}{2} - \sum_{\substack{i < j \\ w_i = w_j = x_k^\pm}} \varepsilon_i \varepsilon_j N^{2(\#\pi - \#\pi \vee 1_{\{i, j\}}) + \#T_{i, j}^{\varepsilon_i, \varepsilon_j}(\sigma) + l_{i, j}(\sigma) - \#\sigma - 1} \varphi_t^w(T_{i, j}^{\varepsilon_i, \varepsilon_j}(\sigma, \pi)), \\ \varphi_0^w(\sigma, \pi) = \mathbf{1}_{\pi = 1_n}. \end{cases} \quad (3.8)$$

Note that if the permutation  $\sigma$  is of the form  $(1 \cdots m_1) \times \cdots \times (1 \cdots m_k)$  then in formula (3.8),  $l_{i, j} = 1$  only if  $j = i + 1$  and  $w_{i+1} = w_i^{-1}$ . Therefore, we could consider a closed differential system indexed by reduced words. In the following, it will be more convenient to fix a word  $w$  and to solve the differential system indexed by partial permutations. Let us denote by  $L_{N, k}$  the linear operator on the space  $\mathbb{C}[\mathcal{PS}_n]^*$  of functions on partial permutations defined in the following way : for any function  $\phi \in \mathbb{C}[\mathcal{PS}_n]^*$ ,

$$\begin{aligned} L_{N, k}(\phi)(\sigma, \pi) &= -\frac{\bar{n}_w(k)}{2} \phi(\sigma, \pi) - \sum_{\substack{i < j \\ w_i = w_j = x_k^\pm}} N^{2(\#\pi - \#\pi \vee 1_{\{i, j\}}) + \#T_{i, j}^{\pm, \pm}(\sigma) - \#\sigma - 1} \phi(T_{i, j}^{\pm, \pm}(\sigma, \pi)) \\ &+ \sum_{\substack{i < j \\ w_i = w_j^{-1} = x_k^\pm}} N^{2(\#\pi - \#\pi \vee 1_{\{i, j\}}) + \#T_{i, j}^{\pm, \mp}(\sigma) + l_{i, j}(\sigma) - \#\sigma - 1} \phi(T_{i, j}^{\pm, \mp}(\sigma, \pi)). \end{aligned}$$

Let us denote further by  $L_k$  and  $D_k$  the linear operators on  $\mathbb{C}[\mathcal{PS}_n]^*$  such that for any function  $\phi \in \mathbb{C}[\mathcal{PS}_n]^*$  and any partial permutation  $(\sigma, \pi)$ ,

$$L_k(\phi)(\sigma, \pi) = -\frac{\bar{n}_w(k)}{2} \phi(\sigma, \pi) - \sum \varepsilon_i \varepsilon_j \phi(T_{i, j}^{\varepsilon_i, \varepsilon_j}(\sigma, \pi)),$$

where the sum is over pairs  $i < j$  such that  $w_i = w_j = x_k^\pm$  and the operator  $T_{i, j}^{\varepsilon_i, \varepsilon_j}$  either splits a cycle of  $\sigma$ , creates a loop or joins two blocks of  $\pi$ . On the other hand, define

$$D_k(\phi)(\sigma, \pi) = - \sum \varepsilon_i \varepsilon_j \phi(T_{i, j}^{\varepsilon_i, \varepsilon_j}(\sigma, \pi)),$$

where the sum is over pairs  $i < j$  such that  $w_i = w_j = x_k^\pm$  and the operator  $T_{i, j}^{\varepsilon_i, \varepsilon_j}$  joins two cycles of  $\sigma$  that are in the same block of  $\pi$ . Then,

$$L_{N, k} = L_k + \frac{1}{N^2} D_k.$$

For any  $t \in \mathbb{R}_+^q$ , as  $N \rightarrow \infty$ ,

$$\varphi_t^N = e^{t_1 L_{1,N} + \dots + t_q L_{q,N}} \mathbf{1}_{1_n} \rightarrow e^{t_1 L_1 + \dots + t_q L_q} \mathbf{1}_{1_n}.$$

We can now prove the following proposition.

**Proposition 3.2.2.** *For any words  $w_1, \dots, w_m \in W_q$ ,*

$$N^{m-2} k_m(\text{Tr}(w_{1,t}), \dots, \text{Tr}(w_{m,t}))$$

*converges as  $N \rightarrow \infty$ . We denote its limit by  $k_t(w_1, \dots, w_m)$ .*

*Proof.* Indeed, let  $w$  be the word that is the concatenation of  $w_1, \dots, w_m$ . Let  $l_1, \dots, l_m$  be the length of each words,  $n = l_1 + \dots + l_m$ ,  $\sigma = (1 \dots l_1) \times \dots \times (1 \dots l_m)$ . Then,

$$N^{m-2} k_m(\text{Tr}(w_{1,t}), \dots, \text{Tr}(w_{m,t})) = \varphi_t^N(\sigma, \pi_\sigma) = e^{t_1 L_1^N + \dots + t_q L_q^N}(\mathbf{1}_{1_n})(\sigma, \pi_\sigma).$$

The right-hand side of the latter equation converges towards  $e^{t_1 L_1 + \dots + t_q L_q}(\mathbf{1}_{1_n})(\sigma, \pi_\sigma)$ .  $\square$

**Speed of convergence :** For any family of words  $w_1, \dots, w_m$  in  $W_q$ , we set  $k_t^N(w_1, \dots, w_m) = N^{m-2} k_m(\text{Tr}(w_{1,t}), \dots, \text{Tr}(w_{m,t}))$ . We would like to control the speed of the convergence of  $k_t^N$  towards  $k_t$  in term of the complexity of the words  $w_1, \dots, w_m$ . For any word  $w \in W_q$ , we call *maximal Amperean area* of  $w$  the number

$$\bar{A}(w) = \sum_{k=1}^q t_k \bar{n}_w^2(k).$$

For any  $p \in \mathbb{N}$  and  $M \in M_p(\mathbb{C})$ , let us set  $\|M\| = \max_{i \in \{1, \dots, p\}} \sum_{j=1}^p |M_{i,j}|$ . Recall that  $\|\cdot\|$  is a sub-multiplicative norm on  $M_p(\mathbb{C})$ , such that for any matrix  $M \in M_p(\mathbb{C})$  and  $v \in \mathbb{C}^p$ ,

$$\max_{i \in \{1, \dots, p\}} |(Mv)_i| \leq \|M\| \max_{i \in \{1, \dots, p\}} |v_i|.$$

**Theorem 3.2.3.** *Let  $w_1, \dots, w_m \in W_q$  be  $m$  words using  $q$  letters and their inverse. Then, for any  $N \in \mathbb{N}^*$ ,*

$$|k_t^N(w_1, \dots, w_m) - k_t(w_1, \dots, w_m)| \leq \frac{1}{N^2} (\bar{A}(w_1) + \dots + \bar{A}(w_m)) e^{\bar{A}(w_1) + \dots + \bar{A}(w_m)}$$

*and for any  $\alpha \in [0, 1]$  and any positive integer  $r$ ,*

$$\max\{|\partial_\alpha^r k_{\alpha,t}^N(w_1, \dots, w_m)|, |\partial_\alpha^r k_{\alpha,t}(w_1, \dots, w_m)|\} \leq (\bar{A}(w_1) + \dots + \bar{A}(w_m))^r e^{\bar{A}(w_1) + \dots + \bar{A}(w_m)}.$$

*Proof.* Let  $w$  be the concatenation of  $w_1, \dots, w_m$ ,  $n \in \mathbb{N}$  and introduce  $\sigma \in \mathfrak{S}_n$  the permutation used in the proof of proposition 3.2.2. For any  $k \in \{1, \dots, q\}$ , the two operators  $L_k$  and  $D_k$  on the space of functions on  $\mathcal{PS}_n$  satisfy

$$\max\{\|L_k\|, \|D_k\|, \|L_k + \frac{1}{N^2} D_k\|\} \leq \frac{1}{2} \bar{n}_w(k)^2 = \frac{1}{2} (\bar{n}_{w_1}(k) + \dots + \bar{n}_{w_m}(k))^2 \leq \bar{n}_{w_1}^2(k) + \dots + \bar{n}_{w_m}^2(k).$$

Let us set  $L = \sum_{k=1}^q t_k L_k$  and  $D = \sum_{k=1}^q t_k D_k$ . Then

$$k_t^N(w_1, \dots, w_m) = e^{L + \frac{1}{N^2} D}(\mathbf{1}_{1_n})(\sigma, \pi_\sigma),$$

and

$$k_t(w_1, \dots, w_m) = e^L(\mathbf{1}_{1_n})(\sigma, \pi_\sigma).$$

The difference we are interested in, is

$$|k_t^N(w_1, \dots, w_m) - k_t(w_1, \dots, w_m)| = \frac{1}{N^2} \left| \int_0^1 e^{s(L + \frac{1}{N^2}D)} D e^{(1-s)L} ds(\mathbf{1}_{1_n})(\sigma, \pi_\sigma) \right|.$$

Therefore, it is bounded by

$$\frac{\|D\|}{N^2} \int_0^1 e^{s\|L + \frac{1}{N^2}D\| + (1-s)\|L\|} ds \max_{(\sigma, \pi) \in \mathcal{P}\mathfrak{S}_n} \{\mathbf{1}_{1_n}(\sigma, \pi)\}.$$

This bound together with the inequality

$$\max\{\|L\|, \|D\|, \|L + \frac{1}{N^2}D\|\} \leq \sum_{k=1}^q t_k \max\{\|L_k\|, \|D_k\|, \|L_k + \frac{1}{N^2}D_k\|\} \leq \bar{A}(w_1) + \dots + \bar{A}(w_m)$$

yields the first part of the Theorem. For any  $r \in \mathbb{N}^*$  and  $\alpha \in ]0, 1[$ ,

$$\partial_\alpha^r k_t^w(w_1, \dots, w_m) = (L + \frac{1}{N^2}D)^r e^{\alpha(L + \frac{1}{N^2}D)}(\mathbf{1}_{1_n})(\sigma, \pi_\sigma).$$

The same bounds imply the second inequality.  $\square$

### 3.3 Yang-Mills measure and higher order master field on the plane

#### 3.3.1 Multiplicative functions

Let us call *parametrized path* any Lipschitz function from  $[0, 1]$  to  $\mathbb{R}^2$  that are either constant or with speed bounded by below. We denote by  $P(\mathbb{R}^2)$  the set of parametrized paths up to bi-Lipschitz increasing reparametrization and call its elements *paths*. For any path  $c$ , let us denote its endpoints  $c(0)$  and  $c(1)$  by  $\underline{c}$  and  $\bar{c}$  and by  $c^{-1}$  the reverse path  $t \in [0, 1] \mapsto c(1 - t)$ . For any  $x \in \mathbb{R}^2$ , we denote by  $L_x(\mathbb{R}^2)$  the set of paths  $c \in P(\mathbb{R}^2)$  such that  $\underline{c} = x = \bar{c}$  and call elements of  $L_x(\mathbb{R}^2)$  loops based at  $x$ . For any loop  $l$  based at some point  $x \in \mathbb{R}^2$ , parametrized by the Lipschitz-continuous map  $\tilde{l} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ , we call *non-based loop* the induced map  $\mathbb{U} \rightarrow \mathbb{R}^2$  up to bi-Lipschitz order preserving one-to-one mapping of  $\mathbb{U}$ . If  $a$  and  $b$  are two paths such that  $\bar{a} = \underline{b}$ , we denote by  $ab$  the path of  $P(\mathbb{R}^2)$  obtained by concatenation. A function  $h : P(\mathbb{R}^2) \rightarrow U(N)$  is called *multiplicative* if for any paths  $a, b \in P(\mathbb{R}^2)$ , such that  $\bar{a} = \underline{b}$ ,

$$h(ab) = h(b)h(a).$$

We denote the space of multiplicative functions by  $\mathcal{M}(P(\mathbb{R}^2), U(N))$  and by  $\mathcal{C}$  the smallest  $\sigma$ -fields such that for any  $c \in P(\mathbb{R}^2)$ ,  $h \in \mathcal{M}(P(\mathbb{R}^2), U(N)) \mapsto h(c) \in U(N)$  is measurable, where  $U(N)$  is endowed with its Borel  $\sigma$ -fields. For any function  $\phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow U(N)$  and  $h \in \mathcal{M}(P(\mathbb{R}^2), U(N))$ , let us define a multiplicative function  $\phi.h$  by setting for any  $c \in P(\mathbb{R}^2)$ ,

$$\phi.h(c) = \phi(\underline{c})h(c)\phi(\bar{c})^{-1}.$$

The function  $\phi.h$  is multiplicative and the application  $(\phi, h) \mapsto \phi.h$  defines an action on  $\mathcal{M}(P, U(N))$  of the group of  $U(N)$ -valued functions on the plane. Two multiplicative functions  $h_1$  and  $h_2$  are called *gauge equivalent* if they are in the same orbit. The Yang-Mills measure on the plane is defined here as a probability measure on  $(\mathcal{M}(P(\mathbb{R}^2), U(N)), \mathcal{C})$ . For any path  $c \in P(\mathbb{R}^2)$ , we denote by  $H_c$  the random variable on  $(\mathcal{M}(P(\mathbb{R}^2), U(N)), \mathcal{C})$  such that for any  $h \in \mathcal{M}(P(\mathbb{R}^2), U(N))$ ,  $H_c(h) = h(c)$ .

### 3.3.2 Definition of the discrete Yang-Mills measure

We follow here the approach of [38] and define first the Yang-Mills measure on embedded graph on the plane. We call here *embedded graph in the plane* the data of a triple of finite sets  $\mathbb{G} = (\mathbb{V}, \mathbb{E}, \mathbb{F}_b)$ , where  $\mathbb{F}_b$  are simply connected domains of the plane with disjoint interior,  $\mathbb{E}$  is a set of paths of  $P(\mathbb{R}^2)$  such that the union of their image is the union of boundaries of elements of  $\mathbb{F}$ ,  $\mathbb{V}$  is the set of endpoints of  $\mathbb{E}$  and the graph induced by  $\mathbb{E}$  on  $\mathbb{V}$  is connected. With this convention, any edge  $e \in \mathbb{E}$  is either a simple loop or an injective path of finite length. We denote by  $F_{\infty, \mathbb{G}}$  (or simply  $F_{\infty}$ ) the interior of  $\mathbb{R}^2 \setminus (\cup_{F \in \mathbb{F}_b} \bar{F})$ . We set  $\mathbb{F} = \mathbb{F}_b \cup \{F_{\infty}\}$  and denote by  $|F|$  the area of any element of  $F \in \mathbb{F}_b$  and by  $\partial F$  the non-based loop whose image is the boundary of  $F$ . We shall write  $P(\mathbb{G})$  for the set of paths that are concatenation of elements of  $\mathbb{E}$ . The set of multiplicative functions on  $P(\mathbb{G})$  is denoted by  $\mathcal{M}(P(\mathbb{G}), U(N))$ . Let  $\mathbb{E}^+$  be an orientation of  $\mathbb{G}$ , that is a subset of  $\mathbb{E}$  such that for any  $e \in \mathbb{E}$ ,  $e$  or  $e^{-1} \in \mathbb{E}^+$ . Then, the space  $\mathcal{M}(P(\mathbb{G}), U(N))$  is in bijection with  $U(N)^{\mathbb{E}^+}$  and  $\mathcal{C}_{\mathbb{G}} = \sigma(h_c, c \in P(\mathbb{G}))$  is the inverse image of the Borel  $\sigma$ -fields. Let us identify these two spaces and denote by  $dh = \otimes_{e \in \mathbb{E}^+} dh_e$  the Haar measure on  $U(N)^{\mathbb{E}^+}$ . This probability measure gives a first example of a random multiplicative function, we shall define the Yang-Mills measure on the embedded graph  $\mathbb{G}$  as a measure absolutely continuous with respect to  $dh$ .

For any skew-hermitian matrix  $X$ , let  $\mathcal{L}_X$  be the first order differential operator on  $C^\infty(U(N))$ , whose action is given for any  $f \in C^\infty(U(N))$  and  $g \in U(N)$  by

$$\mathcal{L}_X f(g) = \frac{d}{dt} f(g \exp(tX))|_{t=0}.$$

For any orthogonal basis  $(X_i)_{1 \leq i \leq N^2}$  of  $\mathfrak{u}(N)$ , let

$$\Delta = \sum_{i=1}^d \mathcal{L}_{X_i} \circ \mathcal{L}_{X_i}.$$

This second order differential operator does not depend on the choice of the orthogonal basis  $(X_i)_{1 \leq i \leq N^2}$  and is called the *Laplacian* of  $U(N)$ . The Brownian motion  $(U_t)_{t \geq 0}$  defined above by the stochastic differential equation (\*) is a Markovian process on  $U(N)$ , with generator  $\frac{1}{2}\Delta$  (see the second chapter or [35] for a proof of this classical fact). Let us denote by  $Q : (t, g) \in \mathbb{R}_+^* \times U(N) \rightarrow q_t(g) \in \mathbb{R}_+$  the unique solution of the heat equation on the unitary group :

$$\partial_t Q = \frac{1}{2} \Delta Q,$$

such that the measure  $q_t(g)dg$  converges weakly towards  $\delta_{\text{Id}}$ . The measure  $q_t(g)dg$  is the law of the Brownian motion at time  $t$ . The law of the Brownian motion is invariant by adjunction and

for any  $t > 0$ , the function  $q_t$  is constant on conjugacy classes. Therefore, for any multiplicative function  $h \in \mathcal{M}_N(\mathcal{P}(\mathbb{G}), \mathcal{U}(N))$ , the function  $q_t \circ h$  is well defined on non-based loops. The *discrete Yang-Mills measure* on the graph  $\mathbb{G}$  is the measure on  $\mathcal{M}_N(\mathcal{P}(\mathbb{G}), \mathcal{U}(N))$  with density

$$\prod_{F \in \mathbb{F}} q_{|F|}(h(\partial F)), \quad (3.9)$$

with respect to  $dh$ . We shall denote this measure by  $YM^{\mathbb{G}}$ . The fact that  $\int_{\mathcal{U}(N)} q_t(g) dg = 1$  and the semi-group property of  $q_t$  yields that  $YM^{\mathbb{G}}$  is a probability measure. Furthermore, note that the group  $\mathcal{U}(N)^{\mathbb{V}}$  acts on  $\mathcal{M}(\mathcal{P}(\mathbb{G}), \mathcal{U}(N))$  in a way similar to the action of  $\mathcal{U}(N)^{\mathbb{R}^2}$  on  $\mathcal{M}(\mathcal{P}(\mathbb{R}^2), \mathcal{U}(N))$  and the invariance of  $q_t$  by adjunction implies that  $YM^{\mathbb{G}}$  is invariant this action.

### 3.3.3 Continuous Yang-Mills measure

Let us denote by  $\preceq$  the partial order on the set of embedded graph defined in the following way. For any pair of graph  $\mathbb{G}_1$  and  $\mathbb{G}_2$ , let us say that  $\mathbb{G}_1$  is finer than  $\mathbb{G}_2$  and write  $\mathbb{G}_1 \preceq \mathbb{G}_2$ , if  $\mathbb{V}_2 \subset \mathbb{V}_1$  and  $\mathbb{E}_2 \subset \mathcal{P}(\mathbb{E}_1)$ . The semi-group property of the kernel  $(q_t)_{t \geq 0}$  allows to show the following lemma.

**Lemma 3.3.1** ([38], Proposition 4.3.4., property  $D_I$ ). *If  $\mathbb{G}_1$  and  $\mathbb{G}_2$  are two graphs such that  $\mathbb{G}_1 \preceq \mathbb{G}_2$ , then, under  $YM^{\mathbb{G}_1}$ , the law of the random multiplicative function  $H_{\mathcal{P}(\mathbb{G}_2)}$  is  $YM^{\mathbb{G}_2}$ .*

One may hope to define, through the Kolmogorov extension theorem, a random element of  $\mathcal{M}_N(\mathcal{P}(\mathbb{R}^2), \mathcal{U}(N))$ . Nonetheless, the order  $\preceq$  is not directed : for any pair of embedded graphs, they may not exist a third one finer than both of them. For that reason, one consider the smaller set  $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$  of embedded graphs with affine edges. The restriction of  $\preceq$  to  $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$  is a directed order and  $(YM^{\mathbb{G}})_{\mathbb{G} \in \mathcal{G}_{\mathcal{A}}}$  is a coherent family of measures. The Kolmogorov theorem applies and implies that there exists a probability measure  $YM^{\mathcal{A}}$  on  $\mathcal{M}_N(\mathcal{P}_{\mathcal{A}}(\mathbb{R}^2), \mathcal{U}(N))$  endowed with the sigma-fields  $\mathcal{C}_{\mathcal{A}} = \sigma(h_a, a \in \mathcal{A})$ , compatible with the sequence of measures  $(YM^{\mathbb{G}})_{\mathbb{G} \in \mathcal{G}_{\mathcal{A}}}$ . The key step is then to extend this measures to  $\mathcal{M}_N(\mathcal{P}(\mathbb{R}^2), \mathcal{U}(N))$  by a continuity argument. At this point, we need to endow  $\mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$  with a topology. Let  $d_1$  and  $d_\ell$  be the two distances on  $\mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$  defined in the following way : for any pair of paths  $c_1, c_2 \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$ ,

$$d_1(c_1, c_2) = |\underline{c_1} - \underline{c_2}| + \int_0^1 |c'_1(t) - c'_2(t)| dt$$

and

$$d_\ell(c_1, c_2) = \inf_{\phi, \psi} \sup_{r, s \in [0, 1]} \{|c_1 \circ \phi(r) - c_2 \circ \psi(s)|\} + |\ell(c_1) - \ell(c_2)|,$$

where we have denoted by  $\ell(c)$  the length of a path  $c \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$  and the infimum is taken over all increasing bijections of  $[0, 1]$ . It have been proved in [38] that  $d_1$  and  $d_\ell$  induce the same topology on  $\mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$ , though  $(\mathcal{P}(\mathbb{R}^2), d_1)$  is complete and  $(\mathcal{P}(\mathbb{R}^2), d_\ell)$  is not. In the following, we shall only use this topology on  $\mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$  and say that a sequence of paths  $(c_n)_{n \geq 0}$  converges to  $c$  if  $c_n$  has fixed endpoints and  $d(c_n, c) \rightarrow 0$ . Thierry Lévy shows in [38] that the measure  $YM^{\mathcal{A}}$  can be extended in the following way.

**Theorem 3.3.2.** *There exists a probability measure  $YM$  on  $(\mathcal{M}_N(\mathcal{P}(\mathbb{R}^2)), \mathcal{C})$  invariant under gauge transformations and area-preserving diffeomorphisms such that, for any embedded graph  $\mathbb{G}$ ,*

$$YM \circ \mathcal{R}_{\mathcal{P}(\mathbb{G})}^{\mathcal{P}(\mathbb{R}^2)} = YM^{\mathbb{G}}.$$

*Let  $(H_c)_{c \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^2)}$  be a random multiplicative function with law  $YM$ . If  $(c_n)_{n \geq 0}$  is a sequence of paths in  $\mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$  that converges to  $l$ , then, under  $YM$ ,  $H_{l_n}$  converges in probability towards  $H_l$ .*

### 3.3.4 Reduced based loops, basis of lassos

Let us fix an embedded graph  $\mathbb{G}$ . Observe that if the boundaries of bounded faces are based at an arbitrary vertex of  $\mathbb{G}$  to form a sequence of loops  $(\partial F_r)_{F \in \mathbb{F}_b}$ , then the random variables  $H_{\partial F_r}, F \in \mathbb{F}_b$  are independent. We need a second identification of the space of multiplicative functions on a graph  $\mathbb{G}$ , which uses this fact to decompose the measure  $YM$ . For any pair of paths  $c_1$  and  $c_2$  of  $\mathcal{P}(\mathbb{G})$ , let us write  $c_1 \sim c_2$  and say that  $c_1$  and  $c_2$  are equivalent if one can get  $c_1$  from  $c_2$  or vice-versa by erasure of paths of the form  $e \cdot e^{-1}$ . For any path, there is a unique element of minimal length in its equivalence class, which is called *reduced*. The set of reduced paths endowed with the operation of concatenation and reduction forms a groupoid that we denote by  $\text{RP}(\mathbb{G})$ . For any  $v \in \mathbb{V}$ , we denote by  $\text{RL}_v(\mathbb{G})$  the set of reduced loops based at  $v$ . Endowed with the above multiplication  $\text{RL}(\mathbb{G})$  is a free group. We shall present two families of free basis of  $\text{RL}_v(\mathbb{G})$ . Let  $\mathbb{E}^+$  be an orientation of the edges of  $\mathbb{G}$ , consider a spanning tree  $T$  and set  $T^+ = T \cap \mathbb{E}^+$ . We denote by  $e : \mathbb{F}_b \rightarrow \mathbb{E}^+ \setminus T^+$  the unique bijection such that for any face  $F \in \mathbb{F}_b$ ,  $e(F)$  is bounding the face  $F$ . For any  $e \in \mathbb{E}$ , bounding a face  $F$ , we denote by  $\partial_e F$  the loop starting with  $e$  and bounding  $F$ . For any  $x, y \in \mathbb{V}$ , we denote by  $[x, y]_T$  the unique path in  $T$  going from  $x$  to  $y$ . Let us now define two families of loops by setting for any edge  $e \in \mathbb{E}$ ,

$$\beta_e = [v, \underline{e}]_T e [\bar{e}, v]_T$$

and for any face  $F \in \mathbb{F}_b$ ,

$$\lambda_F = [v, \underline{e(F)}]_T \partial_{e(F)} F [\underline{e(F)}, v]_T.$$

It is easy to see that  $\text{RL}_v(\mathbb{G})$  is a free group of rank  $\mathbb{F}_b$  with free basis  $(\beta_e)_{e \in \mathbb{E}^+ \setminus T^+}$ . For any loop  $l \in \text{L}(\mathbb{G})$ ,

$$l \sim \beta_{e_1} \beta_{e_2} \cdots \beta_{e_n}, \quad (3.10)$$

where  $e_1, \dots, e_n$  are the edges in  $\mathbb{E} \setminus T$ , used by the loop  $l$  in this order. In [35], it is proved that the second family of loops is another free basis of  $\text{RL}_v(\mathbb{G})$ .

**Proposition 3.3.3** ([35]). *The family  $(\lambda)_{F \in \mathbb{F}_b}$  is a free basis of  $\text{RL}_{v_0}(\mathbb{G})$  and the application*

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_N(\mathcal{P}(\mathbb{G})) &\longrightarrow \text{U}(N)^{T^+} \times \text{U}(N)^{\mathbb{F}_b} \\ h &\longmapsto ((h(e))_{e \in T^+}, (h_{\lambda_F})_{F \in \mathbb{F}_b}) \end{aligned}$$

*is a diffeomorphism. Moreover, under  $YM$ , the random variables  $(H_e)_{e \in T^+}$  and  $(H_{\lambda_F})_{F \in \mathbb{F}_b}$  are independent. For any edge  $e \in T^+$ ,  $H_e$  is Haar distributed and for any face  $F \in \mathbb{F}_b$ ,  $H_{\lambda_F}$  has same law as  $U_{|F|}$ .*

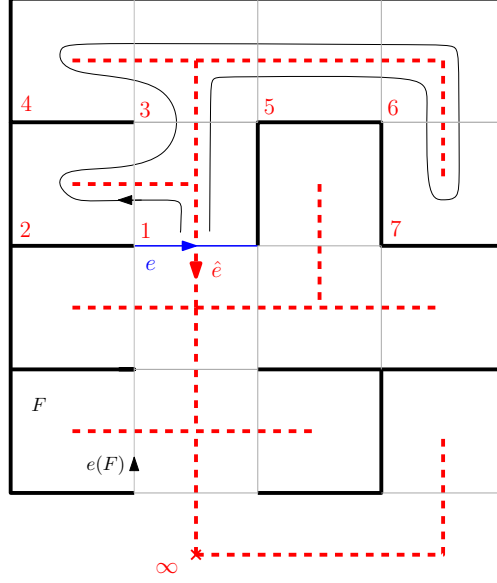


FIGURE 3.1 – We represent with black lines a spanning tree of a square grid together with its dual with dashed red lines. We also display an edge  $e$  of  $\mathbb{E}^+ \setminus T$  in blue together with the order  $\preccurlyeq_e$  on  $C_{F_L(e)}$ , by numbering its elements.

Let us give the change of basis between the two basis of  $\text{RL}_v(\mathbb{G})$  defined above. Denote by  $\hat{\mathbb{G}} = (\hat{\mathbb{V}}, \hat{\mathbb{E}})$  the graph dual to  $\mathbb{G}$ : its vertices are indexed by the set of faces  $\mathbb{F}$ , whereas its edges are indexed by the set  $\mathbb{E}$  such that two faces  $F_1$  and  $F_2$  of  $\mathbb{G}$  are neighbours in  $\hat{\mathbb{G}}$  if their boundaries share a common edge. For any edge  $e \in \mathbb{E}$ , we denote by  $F_L(e)$  and  $F_R(e)$  the edges on the left and on the right of  $e$  and denote by  $\hat{e}$  the edge  $(F_L(e), F_R(e)) \in \hat{\mathbb{E}}$ . Let  $\hat{T} = \mathbb{E} \setminus T$  be the dual spanning tree of  $T$ , considered as rooted at the infinite face  $F_\infty$ . We fix an orientation  $\mathbb{E}^+$  of  $\mathbb{G}$ , such that for any edge  $e \in \mathbb{E}^+ \setminus T$ , the distance in  $\hat{T}$  to the root  $F_\infty$  decreases along  $\hat{e}$ . Note that for any bounded face  $F$ ,  $F_L(e(F)) = F$ . For any face  $F$ , we denote by  $\hat{T}_F$  the subtree of  $\hat{T}$  with root  $F$  and with vertices the set of childs of  $F$  in  $\hat{T}$ , that we denote by  $C_F$ . For any edge  $e \in \mathbb{E}^+ \setminus T^+$ , denote by  $\preccurlyeq_e$  the order on  $\hat{T}_{F_L(e)}$  induced by the time of the first visit by the *clockwise contour process* boarding the dual tree  $\hat{T}$  starting along the left of  $\hat{e}^{-1}$ , as is displayed with an example in figure 3.1. Then, for any edge  $e \in \mathbb{E}^+ \setminus T$ ,

$$\lambda_{F_L(e)} = \beta_e \left( \overrightarrow{\prod}_{F \in C_{F_L(e)}} \beta_{e(F)} \right)^{-1}$$

and

$$\beta_e = \overrightarrow{\prod}_{F \in \hat{T}_{F_L(e)}} \lambda_F, \quad (3.11)$$

where  $\overrightarrow{\prod}$  denotes the product of terms increasing for  $\preccurlyeq_e$ , from the left to the right. For any loop  $l \in \text{L}_v(\mathbb{G})$ , we denote by  $w_l$  the word with letters  $(\lambda_F)_{F \in \mathbb{F}_b}$  and their inverse such that  $l \sim w$ , given by the decomposition (3.10) and the inversion formula (3.11). Using notation of section 3.2, for any face  $F \in \mathbb{F}$  and any complex number  $z \in F$ ,  $n_{w_l}(F) = n_l(z)$ .

**Complexity of lassos decompositions :** We can now give an estimate on the complexity of the decomposition of a loop in  $\mathbb{G}$  in a word of lassos associated to a spanning tree  $T$ . We display in that section results of [35] in a slightly different form adapted to our purpose. For any subset  $E \subset \mathbb{E}$  and any loop  $l \in L(\mathbb{G})$ , denote by  $\mathcal{L}_E(l)$  the number of times that  $l$  uses the edges of  $E$  or  $E^{-1}$ .

**Lemma 3.3.4.** *Let  $l \in L(\mathbb{G})$  be a loop of  $\mathbb{G}$ . Then, for any face  $F \in \mathbb{F}_b$ ,*

$$\bar{n}_{\lambda_F}(w_l) = \mathcal{L}_{[F, F_\infty]_T}(l).$$

*Proof.* The decomposition 3.3.4 and 3.11 yield the equality.  $\square$

From now on, we shall choose the spanning tree in the following way.

**Lemma 3.3.5.** *There exists a spanning tree  $T$  of  $\mathbb{G}$  such that for any face  $F \in \mathbb{F}_b$ ,*

$$d_{\hat{T}}(F, F_\infty) = d(F, F_\infty).$$

For any loop  $l$  of an embedded graph, we shall control the maximal amperean area  $\bar{A}(w_l) = \sum_{F \in \mathbb{F}} |F| \bar{n}_{w_l}(F)^2$  with the length of the loop  $\ell(l)$ . For any loop  $l \in L(\mathbb{R}^2)$ , denote by  $n_l$  the winding number function of  $l$ . The *Amperean area* of  $l$  is the integral

$$A(l) = \int_{\mathbb{R}^2} n_l(x)^2 dx.$$

**Lemma 3.3.6** (Banchoff-Pohl inequality). *For any loop of finite length  $l \in L(\mathbb{R}^2)$ ,*

$$A(l) \leq \pi \ell(l)^2.$$

Note that if  $\bar{n}_l = \pm n_l \in \mathbb{Z}^{\mathbb{F}}$ , that is, if  $l$  winds only to the left or only to the right, then the Banchoff-Pohl inequality gives the expected bound. To treat more general loops, we need the following lemma.

**Lemma 3.3.7.** *There exists a loop  $\bar{l} \in L(\mathbb{G})$ , which does not use any edge twice, such that for any face  $F \in \mathbb{F}$  and  $z \in F$ ,*

$$n_{\bar{l}}(z) = d(F, F_\infty).$$

**Lemma 3.3.8.** *Fix  $p \in \mathbb{N}^*$  and loops  $l_1, \dots, l_m \in L(\mathbb{G})$  in an embedded graph  $\mathbb{G}$  such that the union of the edges of  $l_1, \dots, l_m$  is  $\mathbb{E}$ . Let  $l \in L(\mathbb{G})$  be a loop that uses each edge at most  $p$  times. Then*

$$A(w_l) \leq \pi p^2 (\ell(l_1) + \dots + \ell(l_m))^2.$$

*Proof.* The assumptions together with Lemma 3.3.4 yield that for any face  $F \in \mathbb{F}_b$ ,

$$\bar{n}_{w_l}(F) \leq p \cdot d(F, F_\infty).$$

Let us now choose a loop  $\bar{l}$  as in Lemma 3.3.7. Then,  $\bar{A}(w_l) \leq p^2 \bar{A}(\bar{l}) \ell(\bar{l}) \leq \ell(l_1) + \dots + \ell(l_m)$  and Banchoff-Pohl inequality yields the expected bound.  $\square$



### 3.3.5 $U(1)$ -Yang-Mills measure

Let us consider the commutative case,  $N = 1$ . Let  $\mathbb{G}$  be an embedded graph in the plane. For any loop  $l \in \text{RL}(\mathbb{G})$ , denote by  $n_l \in \mathbb{Z}^{\mathbb{F}}$  its winding number function. For any based point  $v \in \mathbb{V}$ , the group  $\text{RL}_v(\mathbb{G})$  is isomorphic to the free group of rank  $\#\mathbb{F}_b$  and the map  $l \in \text{RL}_v(\mathbb{G}) \mapsto n_l \in \mathbb{Z}^{\mathbb{F}}$  induces an isomorphism between the Abelianization of  $\text{RL}_v(\mathbb{G})$  and  $\mathbb{Z}^{\mathbb{F}}$ . Therefore, any homomorphism  $\varphi : \text{RL}_v(\mathbb{G}) \rightarrow U(1)$  factorizes through a homomorphism  $\tilde{\varphi} : \mathbb{Z}^{\mathbb{F}} \rightarrow U(1)$  such that for any reduced loop  $l \in \text{RL}_v(\mathbb{G})$ ,  $h(l) = \tilde{h}(n_l)$ . Under  $U(1)$ -YM measure,  $(H_{\lambda_F})_{F \in \mathbb{F}_b}$  has the same law as  $\#\mathbb{F}_b$  independent  $U(1)$ -Brownian motion  $(U_{F,|F|})_{F \in \mathbb{F}_b}$ . Let  $W$  be a white noise on the plane with intensity given by the Lebesgue measure. The random family  $(H_l)_{l \in \text{RL}(\mathbb{G})}$  is equal to  $(\prod_{F \in \mathbb{F}_b} H_{\lambda_F}^{n_F(l)})_{l \in \text{RL}(\mathbb{G})}$  and has the same law as  $(\exp(iW(n_l)))_{l \in \text{RL}(\mathbb{G})}$ . If  $(l_n)_{n \geq 0}$  is a sequence of loops of finite length that converge to a loop  $l \in L(\mathbb{R}^2)$ , then  $\|n_{l_n} - n_l\|_2 \rightarrow 0$  and the sequence of random variables  $\exp(iW(n_{l_n}))$  converges to  $\exp(iW(n_l))$  in distribution. Hence, the process  $(H_l)_{l \in L(\mathbb{R}^2)}$  introduced in Theorem 3.3.2 has the same law as  $(\exp(iW(n_l)))_{l \in L(\mathbb{R}^2)}$ . Moreover, the same argument and Lemma 3.1.1 yield the following Lemma.

**Lemma 3.3.9.** *For any integer  $N \in \mathbb{N}^*$ , under  $U(N)$ -Yang-Mills measure,  $(\det(H_l))_{l \in L(\mathbb{R}^2)}$  has the same law as  $(\exp(iW(n_l)))_{l \in L(\mathbb{R}^2)}$ .*

### 3.3.6 Master field of higher order

For any loops  $l_1, \dots, l_m \in L(\mathbb{R}^2)$ , we set

$$\Phi_m^N(l_1, \dots, l_m) = N^{m-2} k_N (\text{Tr}(H_{l_1}), \dots, \text{Tr}(H_{l_m})),$$

where the cumulants are with respect to the  $U(N)$ -Yang-Mills measure. Observe that the law of the unitary Brownian motion is invariant under complex conjugation. Hence

$$\Phi_m(l_1, \dots, l_m) = \overline{\Phi_m(l_1, \dots, l_m)} = \Phi_m(l_1^{-1}, \dots, l_m^{-1})$$

is real-valued. The Proposition 3.3.3 together with the inversion formula (3.11) allows to use the result of the first part about words in independent Brownian motions to study the Yang-Mills measure and to show the following results.

**Proposition 3.3.10.** *For any family  $l_1, \dots, l_m$  of affine loops in  $L(\mathbb{R}^2)$ , the sequence  $\Phi_m^N(l_1, \dots, l_m)$  converges as  $N \rightarrow \infty$ . We denote its limit by  $\Phi_m(l_1, \dots, l_m)$ .*

We call a finite family of loops of  $L(\mathbb{R}^2)$  a *skein*. We denote the set of skein by  $\text{Sk}(\mathbb{R}^2)$  and we endow it with the topology associated to the product topology. If  $\mathcal{S} = \{l_1, \dots, l_m\}$  is a skein, we write  $\Phi^N(\mathcal{S})$  and  $\Phi(\mathcal{S})$  for  $\Phi^N(l_1, \dots, l_m)$  and  $\Phi(l_1, \dots, l_m)$ . Let us denote by  $\mathcal{E}_{\mathcal{A}}$  the set of skeins of piecewise affine loops of  $\mathbb{R}^2$  with transverse intersections of multiplicity at most 2. We call elements of  $\mathcal{E}_{\mathcal{A}}$  *affine skeins*. The previous analysis of the complexity of decompositions of loops into lassos yields the following result.

**Theorem 3.3.11.** *Fix a constant  $K > 0$ . For any skein  $\mathcal{S} \in \mathcal{E}_{\mathcal{A}}$  of loops of length smaller than  $K > 0$  and taking their values in the ball center at 0, of radius  $K$ ,*

$$|\Phi^N(\mathcal{S}) - \Phi(\mathcal{S})| \leq \frac{36m^2 K^2}{N^2} e^{36\pi m^2 K^2}.$$

*Proof.* Let us assume that  $\mathcal{S} = \{l_1, \dots, l_m\}$  is a family of loops in  $\mathcal{E}_{\mathcal{A}}$  all based at 0. Let  $\mathbb{G}_{\mathcal{S}} = (\mathbb{V}_{\mathcal{S}}, \mathbb{E}_{\mathcal{S}}, \mathbb{F}_{\mathcal{S}})$  be the embedded graph with vertices the set of intersection points of  $\mathcal{S}$  and with edges the restriction of elements of  $\mathcal{S}$  between times of intersection. Lemma 3.3.8 and Theorem 4.2.5 imply that

$$|\Phi_m^N(l_1, \dots, l_m) - \Phi_m(l_1, \dots, l_m)| \leq \frac{4\pi}{N^2} (\ell(l_1) + \dots + \ell(l_m))^2 e^{4\pi(\ell(l_1) + \dots + \ell(l_m))}. \quad (3.12)$$

Consider now  $(l_1, \dots, l_m) \in \mathcal{E}_{\mathcal{A}}$  satisfying the assumption of the Theorem. For any  $\varepsilon > 0$ , let us choose piecewise affine paths  $\gamma_1, \dots, \gamma_m$  such that  $\underline{\gamma}^i = l_i, \overline{\gamma}_i = 0, \ell(\gamma_i) \leq K(1 + \varepsilon)$  for any  $i \in \{1, \dots, m\}$  and  $\{\gamma_i l_i \gamma_i^{-1}, i \in \{1, \dots, m\}\}$  is an affine skein. The application of (3.12) to  $\{\gamma_i l_i \gamma_i^{-1}, i \in \{1, \dots, m\}\}$  yields the announced inequality.  $\square$

For any fixed  $N$ , the Theorem 3.3.2 implies that the function  $\Phi^N : L(\mathbb{R}^2)^m \rightarrow \mathbb{C}$  is continuous for any integer  $m$ . Then, thanks to Theorem 3.3.11, one can extend the function  $\Phi : \mathcal{E}_{\mathcal{A}} \rightarrow \mathbb{R}$  to  $\text{Sk}(\mathbb{R}^2)$ . We call the function  $\Phi : \text{Sk}(\mathbb{R}^2) \rightarrow \mathbb{C}$  the *higher-order master field*.

**Theorem 3.3.12.** *For skein  $\mathcal{S} \in \text{Sk}(\mathbb{R}^2)$ , the sequence  $\Phi^N(\mathcal{S})$  converges towards  $\Phi(\mathcal{S})$ , as  $N \rightarrow \infty$ . The function  $\Phi$  is a real-valued continuous function on  $\text{Sk}(\mathbb{R}^2)$ .*

A consequence of this Theorem is that for any  $m \geq 3$ , and any loops  $l_1, \dots, l_m$  in  $L(\mathbb{R}^2)$ ,

$$k^N(\text{Tr}(H_{l_1}), \dots, \text{Tr}(H_{l_m})) = N^{2-m} \Phi_m^N(l_1, \dots, l_m) \rightarrow 0,$$

as  $N \rightarrow \infty$ . The following theorem follows.

**Theorem 3.3.13.** *The random family  $(\text{Tr}(H_l) - \mathbb{E}[\text{Tr}(H_l)])_{l \in L(\mathbb{R}^2)}$  converges weakly under the  $U(N)$ -Yang-Mills measure, towards a Gaussian field  $(\phi_l)_{l \in L(\mathbb{R}^2)}$  with covariance function  $\Phi_2$ , as  $N \rightarrow \infty$ . Moreover, if  $(l_n)_{n \geq 0}$  is a fixed sequence of loops in  $L(\mathbb{R}^2)$  that converges towards  $l \in L(\mathbb{R}^2)$ , then  $\phi_{l_n} \rightarrow \phi_l$  in distribution.*

### 3.3.7 Master fields of small loops

For any  $\alpha > 0$  and any loop  $l \in L(\mathbb{R}^2)$ , denote by  $\alpha.l$  the image of  $l$  by the dilatation of rate  $\alpha$ , centered at 0. If  $\mathcal{S} = \{l_1, \dots, l_m\}$  is a skein,  $\alpha.\mathcal{S} = \{\alpha.l_1, \dots, \alpha.l_m\}$ . The following proposition shows that, as  $\alpha \rightarrow 0$ , all the quantities defined above have the same behavior at first order.

**Proposition 3.3.14.** *The following Taylor expansions are true for any  $N \in \mathbb{N}^*$ . As  $\alpha \rightarrow 0$ , for any loop  $l \in L(\mathbb{R}^2)$ ,*

$$\Phi^N(\sqrt{\alpha}.l) = 1 - \frac{\alpha}{2} \int_{\mathbb{R}^2} n_l^2(x) dx + O(\alpha^2) = \Phi(\sqrt{\alpha}.l) + O(\alpha^2)$$

and for any skein  $\mathcal{S}$  with at least two loops,

$$\Phi^N(\sqrt{\alpha}.\mathcal{S}) = (-\alpha)^{-|\mathcal{S}|+1} \sum_{T_{\mathcal{S}}} \prod_{\{l_1, l_2\} \in T_{\mathcal{S}}} \int_{\mathbb{R}^2} n_{l_1}(x) n_{l_2}(x) dx + O(\alpha^{|\mathcal{S}|}) = \Phi(\sqrt{\alpha}.\mathcal{S}) + O(\alpha^{|\mathcal{S}|}),$$

where the sum is over connected graph with vertices  $\mathcal{S}$  and  $|\mathcal{S}| - 1$  edges. In both cases, there exists a positive continuous function  $b$ , independant of  $N$ , such that  $O(\alpha^{|\mathcal{S}|}) \leq \alpha^{|\mathcal{S}|} b(\sum_{l \in \mathcal{S}} \ell(l))$ .

In particular, for any skein with an odd number of loops,  $\Phi(\alpha.\mathcal{S}) = O(\alpha^{|\mathcal{S}|})$ , as  $\alpha \rightarrow 0$ .

*Proof.* Let  $\mathcal{S} = \{l_1, \dots, l_m\}$  be an affine skein. Let us consider the embedded graph  $(\mathbb{V}, \mathbb{E}, \mathbb{F}_b) = \mathbb{G}_{\mathcal{S}}$ , choose a lassos basis  $(\lambda_F)_{F \in \mathbb{F}}$  and for any  $l \in \mathcal{S}$ , let  $w_l$  be a word with letters indexed by  $\mathbb{F}$ , such that  $w(\lambda_F, F \in \mathbb{F}) = l$ . We will make a Taylor expansion at first order in  $\alpha$  of the functions  $\Phi^N(\sqrt{\alpha}.\mathcal{S})$  and  $\Phi^N(\sqrt{\alpha}.l)$ . We shall now use the work of section 3.2 applied to the words  $w_{l_1}, \dots, w_{l_m}$ . Set  $w = w_{l_1} \cdots w_{l_m}$ . Recall that

$$\Phi^N(\alpha.\mathcal{S}) = \varphi_{\alpha|\mathbb{F}|}^w(\sigma, 1_{\ell(w)}),$$

where  $\sigma = (1 \cdots \ell(w_{l_1})) \times \cdots \times (1 \cdots \ell(w_{l_m}))$ . Let us first assume that  $\mathcal{S}$  contains a single loop  $l$ . Then, according to equation (3.8), for any face  $F \in \mathbb{F}$ ,

$$\begin{aligned} \partial_{|F|} \varphi_{|\mathbb{F}|}((1 \cdots \ell(w)), 1_{\ell(w)})|_{|\mathbb{F}|=0} &= -\bar{n}_w(F) - \sum_{1 \leq i < j \leq \ell(w): w_i = w_j = F} \varepsilon_i \varepsilon_j \\ &= -\bar{n}_w(F) - \frac{1}{2}(n_w^+(F)(n_w^+(F) - 1) + n_w^-(F)(n_w^-(F) - 1) + n_w^+(F)n_w^-(F)) \\ &= -\frac{n_w(F)^2}{2}. \end{aligned}$$

It follows that, as  $\alpha \rightarrow 0$ ,

$$\begin{aligned} \Phi^N(\sqrt{\alpha}.l) &= 1 - \sum_{F \in \mathbb{F}} |F| \frac{n_w(F)^2}{2} \alpha + O(\alpha^2) \\ &= 1 - \frac{\int_{\mathbb{R}^2} n_l^2(x) dx}{2} \alpha + O(\alpha^2). \end{aligned}$$

Let us now consider affine skeins with more than two loops. Note that for any partial permutation  $(\sigma, \pi) \in \mathcal{P}_{\ell(w)}$  if  $\pi \neq \pi_\sigma$ ,  $\varphi_0^w(\sigma, \pi) = 0$ , otherwise,  $\varphi_0^w(\sigma, \pi) = 1$ . Therefore, if  $m \geq 2$ , formula (3.8) yields that for any sequence of faces  $F_1, \dots, F_k$ , if  $k < m - 1$ , then

$$\partial_{|F_1|} \cdots \partial_{|F_k|} \varphi_{|\mathbb{F}|}(\sigma, 1_{\ell(w)})|_{|\mathbb{F}|=0} = 0$$

and if  $k = m - 1$ , then

$$\partial_{|F_1|} \cdots \partial_{|F_{m-1}|} \varphi_{|\mathbb{F}|}(\sigma, 1_{\ell(w)}) = (-1)^{m-1} \sum_{i_1 < j_1, \dots, i_{m-1} < j_{m-1}} \varepsilon_{i_1} \varepsilon_{j_1} \cdots \varepsilon_{i_{m-1}} \varepsilon_{j_{m-1}},$$

where the sum is over sequence of pairs of letters  $i_1 < j_1, \dots, i_{m-1} < j_{m-1}$  such that for any  $k \in \{1, \dots, m-1\}$ ,  $w_{i_k} = w_{j_k} = F_k$  and  $\pi_\sigma \vee 1_{\{i_1, j_1\}} \vee \cdots \vee 1_{\{i_{m-1}, j_{m-1}\}} = 1_{\ell(w)}$ . It follows that, as  $\alpha \rightarrow 0$ ,

$$\Phi^N(\sqrt{\alpha}.\mathcal{S}) = (-1)^{m-1} \alpha^{m-1} \sum_{i_1 < j_1, \dots, i_{m-1} < j_{m-1}} \varepsilon_{i_1} \varepsilon_{j_1} \cdots \varepsilon_{i_{m-1}} \varepsilon_{j_{m-1}} |w_{i_1}| \cdots |w_{i_{m-1}}| + O(\alpha^m),$$

where the sum is over sequence of pair of letters  $i_1 < j_1, \dots, i_{m-1} < j_{m-1}$  such that for any  $k \in \{1, \dots, m-1\}$ ,  $w_{i_k} = w_{j_k}$  and  $\pi_\sigma \vee 1_{\{i_1, j_1\}} \vee \cdots \vee 1_{\{i_{m-1}, j_{m-1}\}} = 1_{\ell(w)}$ . Recall that blocks of  $\pi_\sigma$  are indexed by  $\mathcal{S}$ . For any pair  $(l, l')$  of elements of  $\mathcal{S}$ , we denote respectively by  $n_{l, l'}^{\pm, \pm}$

and  $n_{l,l'}^{\pm,\mp}$  the quantities  $\sum_{\substack{1 \leq i < j \leq \ell(w) \\ i \in \pi_\sigma(l), j \in \pi_\sigma(l') \text{ and } \varepsilon_i = \varepsilon_j = \pm 1}} |w_i|$  and  $\sum_{\substack{1 \leq i < j \leq \ell(w) \\ i \in \pi_\sigma(l), j \in \pi_\sigma(l') \text{ and } \varepsilon_i = -\varepsilon_j = \pm 1}} |w_i|$ . The above sum is equal to

$$\sum_{\{l_1, l'_1\}, \dots, \{l_{m-1}, l'_{m-1}\}} \prod_{k=1}^{m-1} \left( n_{l_k, l'_k}^{+,+} + n_{l_k, l'_k}^{-,-} - n_{l_k, l'_k}^{+,-} - n_{l_k, l'_k}^{-,+} \right),$$

where the sum is indexed by pairings  $\{l_1, l'_1\}, \dots, \{l_{m-1}, l'_{m-1}\}$  of elements of  $\mathcal{S}$  such that the graph they induce on  $\mathcal{S}$  is connected. Now, observe that for any pair  $(l, l')$  of distinct loops of  $\mathcal{S}$ ,

$$n_{l,l'}^{+,+} + n_{l,l'}^{-,-} - n_{l,l'}^{+,-} - n_{l,l'}^{-,+} = \int_{\mathbb{R}^2} n_l(x) n_{l'}(x) dx.$$

The Taylor expansion follows for the affine skein  $\mathcal{S}$ . Note that the larger order terms are controled by Theorem 4.2.5 and the inequality of Lemma 3.3.8, so that the second part of Proposition is true for affine skeins. The continuity of  $\Phi^N$ ,  $\Phi$  and  $b$  allows to conclude.  $\square$

The expansion for skein yields the following convergences.

**Corollary 3.3.15.** *Let  $W$  be a white noise on  $\mathbb{R}^2$ , with intensity given by the Lebesgue measure. As  $t \rightarrow 0$ , the Gaussian field  $(\frac{1}{t}\phi_{t,l})_{l \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)}$ , as well as, for any  $N \in \mathbb{N}^*$ , the random function  $(t^{-1}(\text{tr}(H_{t,l}) - 1))_{l \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)}$ , under  $U(N)$ -Yang-Mills measure converges in distribution towards  $(iW(n_l))_{l \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)}$ .*

## 3.4 Computation of the master field

We shall now address the problem of the explicit computation of the master field of higher order. We say that  $\mathcal{S} \in \text{Sk}(\mathbb{R}^2)$  is a *regular skein* if its elements are smooth loops with transverse intersection of order 2, denote by  $\text{Sk}_r(\mathbb{R}^2)$  the set of regular skeins and by  $\overline{\text{Sk}}_r(\mathbb{R}^2)$  its quotient under diffeomorphisms. For any integer  $n$ , the set of equivalence classes of skeins with less than  $n$  intersections is finite. Thanks to its invariance property under area-preserving diffeomorphisms and to its continuity, the master field of higher order is characterized by its value on  $\text{Sk}_r(\mathbb{R}^2)$  and yields functions indexed by  $\overline{\text{Sk}}_r(\mathbb{R}^2)$ , that we shall compute here inductively.

### 3.4.1 Makeenko-Migdal equation

For any skein  $\mathcal{S}$ , let us denote by  $W_{\mathcal{S}}$  the expectation  $\mathbb{E}^{YM^{U(N)}} [\prod_{l \in \mathcal{S}} \text{Tr}(H_l)]$ , we call this function a *Wilson skein*<sup>5</sup> and say it is regular whenever the associated skein is. In view of Proposition 3.3.3, one may try to compute the master field of higher order of a regular skein  $\mathcal{S}$  using Itô formula to yield a first order differential system for the family  $(W_{\mathcal{S}})_{\mathcal{S} \in \text{Sk}_r(\mathbb{R}^2)}$ , with areas of the faces of a graph  $\mathbb{G}$  containing  $\mathcal{S}$  as variables. However, this differential system yields at first sight non-regular Wilson skeins  $W_{\mathcal{S}}$  on  $\mathcal{M}(\text{P}(\mathbb{G}), U(N))$ , as features the example 3.4.1.

**Example 3.4.1.** *Consider a loop  $l$  that winds three times around the origin. Let us name the faces  $A, B$  and  $C$  and choose a lassos basis  $(l_A, l_B, l_C)$  according to a spanning tree as illustrated in figure 3.2 in dashed lines. In this basis, the loop is decomposed as  $l = l_C l_B l_A^2 l_B l_A$ .*

5. We warn the reader that these functions are not normalized as they can be in the literature, so that, with this conventions,  $W_{\text{cst}} = N$ .

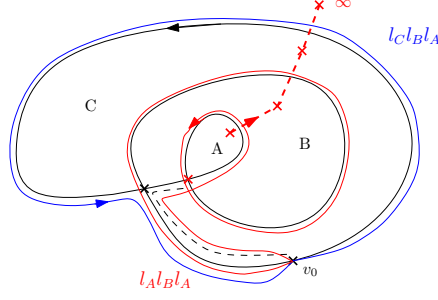


FIGURE 3.2

Using Itô formula as described in Lemma 3.1.4 and differentiating with respect to the area of the faces  $C$  and  $B$  yields  $\frac{d}{d|C|}W_l = -\frac{W_l}{2}$  and

$$N \left( \frac{d}{d|B|} (W_l) + W_l \right) = -W_{l_B l_A^2} W_{l_C l_B l_A} = -W_{l_A l_B l_A} W_{l_C l_B l_A}.$$

These first two derivatives can be expressed in terms of regular Wilson skeins. However, the derivative with respect to the face of index 3 yields terms that do not seem to be polynomials of regular Wilson skeins :

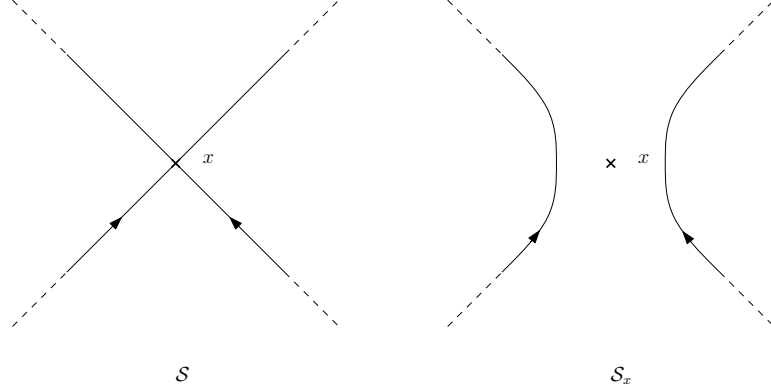
$$N \left( \frac{d}{d|C|} (W_l) + \frac{3}{2} W_l \right) = -W_{l_B l_A} W_{l_C l_B l_A^2} - W_{l_C l_B l_A}^2 - W_{l_A} W_{l_B l_A l_C l_B l_A}.$$

For any regular skein  $\mathcal{S}$ , one must therefore face the problem of finding a closed system of Wilson skeins containing  $W_{\mathcal{S}}$ . The system of equations given by Lemma 3.1.4 gives such a system, but its size happens to grow exponentially with the number of faces of the original skein (see section 6.8 of [35], where the smallest closed system obtained is made of what is called Wilson garland). The Makeenko-Midgal equation solves this problem and gives linear combinations of area derivatives operators that preserve the set of function indexed by skeins, so that the size of the system grows as a polynomial in the number of faces. Let  $\mathcal{S}$  be a skein and  $x$  a point of intersection. Let us denote by  $\mathcal{S}_x$  the skein composed with the same loops as  $\mathcal{S}$  except for the loop or the pair of loops containing  $x$  that is replaced respectively by the pair of loops or the loop that instead of going straight along the same strand of  $\mathcal{S}$ , turns at the point  $x$  using the other strand with the same orientation (see figure 3.3).

The following proposition is proved in [35], in a more general framework and relies on integration by parts applied to the product of a function on  $\mathcal{M}(\mathbb{P}(\mathbb{G}), \mathbb{U}(N))$  with the density of the discrete Yang-Mills measure. We provide here another proof relying on the decomposition in lassos described in section 3.3.4 and on the invariance of the Brownian motion by adjunction. Let us fix a regular skein  $\mathcal{S}$  and an embedded graph  $\mathbb{G}$  such that elements of  $\mathcal{S}$  belongs to  $\mathbb{P}(\mathbb{G})$ .

**Proposition 3.4.2** (Makeenko-Midgal equation). *Let  $F_1, \dots, F_4$  be the four faces of  $\mathbb{G}$  around a point of intersection  $x \in \mathbb{V}$  of  $\mathcal{S}$  in a cyclic order and such that  $F_1$  is the face bounded by the two edges of  $\mathcal{S}$  leaving  $x$ . Then,*

$$\left( \frac{d}{d|F_1|} - \frac{d}{d|F_2|} + \frac{d}{d|F_3|} - \frac{d}{d|F_4|} \right) \mathbb{E}^{YM^{\mathbb{U}(N)}} \left[ \prod_{l \in \mathcal{S}} \text{Tr}(H_l) \right] = \frac{1}{N} \mathbb{E}^{YM^{\mathbb{U}(N)}} \left[ \prod_{l \in \mathcal{S}_x} \text{Tr}(H_l) \right]. \quad (3.13)$$

FIGURE 3.3 – Local transformation at an intersection point  $x$  of a skein  $\mathcal{S}$ .

For any skein  $\mathcal{S}$ , let us set  $n_{\mathcal{S}} = \sum_{l \in \mathcal{S}} n_l$ . Notice that for  $N = 1$ , the equality (3.13) is equivalent to the fact

$$n_{\mathcal{S}}(F_1)^2 - n_{\mathcal{S}}(F_2)^2 + n_{\mathcal{S}}(F_3)^2 - n_{\mathcal{S}}(F_4)^2 = -2.$$

*Proof.* Let us denote by  $\mu_x$  the operator  $\frac{d}{d|F_1|} - \frac{d}{d|F_2|} + \frac{d}{d|F_3|} - \frac{d}{d|F_4|}$ , where the faces are numbered as in the Proposition. The strategy of our proof is to choose a spanning tree of  $\mathbb{G}$  to decompose the loops of the skein as described in section 3.3.4 and to use the formula (3.1.4) for independant Brownian motions in such a way that terms on the left-hand-side of (3.13) cancel themselves so that a single transposition operator contributes. For a fixed spanning tree  $T$  of  $\mathbb{G}$ , the decomposition goes as follows. Decompose each loop  $l \in \mathcal{S}$  as in (3.10) and use the inversion formula (3.11)<sup>6</sup> as is done in the example 3.4.1 for a single loop. Let us order arbitrarily the elements of  $\mathcal{S}$ , recall that  $w_{l_1}, \dots, w_{l_m}$  are the words in lassos associated to  $l_1, \dots, l_m$ , set  $w = w_{l_1} \dots w_{l_m}$ , denote by  $n$  the sum  $\ell(w_1) + \dots + \ell(w_m)$  and by  $\sigma_{\mathcal{S}} \in \mathfrak{S}_n$  the permutation  $(1 \dots \ell(w_{l_1})) \times \dots \times (1 \dots \ell(w_{l_m}))$ . Let  $\{(U_{F,t})_{t \geq 0}, F \in \mathbb{F}\}$  be independent unitary Brownian motions. Then,

$$W_{\mathcal{S}} = \mathbb{E} \left[ \prod_{i=1}^m \text{Tr}(w_{l_i}(U_{F,|F|}, F \in \mathbb{F})) \right] = \mathbb{E} \left[ \text{Tr} \left( \sigma_{\mathcal{S}} w^{\otimes} (U_{F,|F|}, F \in \mathbb{F}) \right) \right].$$

In the decompositions of  $w_{l_1}, \dots, w_{l_m}$ , each letter corresponds to a face  $F$  and an edge  $e \in [F, F_{\infty}]_{\hat{T}}$  visited by a loop of  $\mathcal{S}$ . Let us denote by  $\Gamma_{T, \mathbb{G}}$  the set  $\{(e, F) \in (\mathbb{E}^+ \setminus T^+) \times \mathbb{F} : e \in [F, F_{\infty}]\}$  and by  $\iota : \Gamma_{T, \mathbb{G}} \rightarrow \{1, \dots, n\}$  the bijection induced by the decomposition of loops and the ordering  $l_1, \dots, l_m$  of the skein  $\mathcal{S}$ . By assumption each edge  $e \in \mathbb{E}^+$  is used at most once by a loop of  $\mathcal{S}$ , we set  $\varepsilon_e = -1$ , if a loop of  $\mathcal{S}$  goes backwards along  $e$  and  $\varepsilon_e = 1$ , otherwise (in the example 3.4.1,  $\varepsilon_e = 1$  for any  $e \in \mathbb{E}^+$ ). Recall the definition (3.6) of the operators  $(T_{i,j}^{\varepsilon})_{1 \leq i, j \leq n}$ . The equation 3.7 yields that for any face  $F \in \mathbb{F}_b$ ,

$$\frac{d}{d|F|} W_{\mathcal{S}} = -\frac{\mathcal{L}_{[F, F_{\infty}]}(\mathcal{S})}{2} W_{\mathcal{S}} - \frac{1}{N} \sum_{\substack{\hat{e}, \hat{e}' \in [F, F_{\infty}]_{\hat{T}} \\ e \neq e' \text{ traversed by } \mathcal{S}}} \varepsilon_e \varepsilon_{e'} \mathbb{E} [\text{Tr}(T_{\iota_e, F, \iota_{e'}, F}(\sigma_{\mathcal{S}}) \cdot w^{\otimes}(U_{F,|F|}, F \in \mathbb{F}_b))]. \quad (3.14)$$

6. Note that the words obtained may be non reduced, for exemple, if  $A$  is the only child of  $B$  and is a leaf in  $\hat{T}$ , then this decomposition is  $\lambda_B = \beta_{e(B)} \beta_{e(A)}^{-1} = \lambda_B \lambda_A \lambda_A^{-1}$ .

Consider two faces  $A$  and  $B$  such that  $A$  is the first child of  $B$  in  $\hat{T}$  for  $\preceq_{e(B)}$ . Observe that if the letter  $\lambda_B$  (resp.  $\lambda_B^{-1}$ ) occurs in the words  $w_{l_1}, \dots, w_{l_m}$ , then it is always on the left (resp. on the right) of  $\lambda_A$  (resp.  $\lambda_A^{-1}$ ). It follows that for any pair of distinct edges  $e_1, e_2$  such that  $\hat{e}_1, \hat{e}_2 \in [B, F_\infty]_{\hat{T}}$ ,

$$T_{\iota_{e_1, A}, \iota_{e_2, A}}^\varepsilon(\sigma_S) = T_{\iota_{e_1, B}, \iota_{e_2, B}}^{-\varepsilon}(\sigma_S).$$

Then, equation (3.14) implies that

$$\left( \frac{d}{d|A|} - \frac{d}{d|B|} \right) W_S = -\mathbb{E} \left[ \text{Tr} \left( \left( \frac{1}{2} + C_A \right) (\sigma_S) w^\otimes(U_{F, |F|}, F \in \mathbb{F}_b) \right) \right], \quad (3.15)$$

where for any face  $F \in \mathbb{F}_b$ ,

$$C_F = \frac{1}{N} \sum_{\substack{e' \in [F, F_\infty]_{\hat{T}} \\ \text{traversed by } \mathcal{S}}} \varepsilon_{e(F)} \varepsilon_{e'} T_{\iota_{e(F), F}, \iota_{e'}, F}.$$

Denote by  $\Theta_{A,B}$  the automorphism of the free group  $\text{RL}(\mathbb{G})$  that sends  $\lambda_B$  to  $\lambda_A \lambda_B \lambda_A^{-1}$  and fixes  $\lambda_F$  for  $F \neq B$ . The automorphism  $\Theta_{A,B}$  transposes the letters  $\lambda_A$  and  $\lambda_B$  in the words  $w_{l_1}, \dots, w_{l_m}$ . We shall now use the invariance of the Brownian motion by adjunction. Under the unitary Yang-Mills measure,  $(H_{\lambda_F})_{F \in \mathbb{F}}$  and  $(H_{\Theta_{A,B}(\lambda_F)})_{F \in \mathbb{F}}$  have the same law as  $(U_{F, |F|})_{F \in \mathbb{F}_b}$  and

$$W_S = \text{Tr}[\sigma_S \mathbb{E}[\Theta_{A,B}(w)^\otimes(U_{F, |F|}, F \in \mathbb{F}_b)]] = \mathbb{E} \left[ \prod_{i=1}^m \text{Tr}[\Theta_{A,B}(w_{l_i})(U_{F, |F|}, F \in \mathbb{F}_b)] \right].$$

What is more, if a letter appears in position  $\iota_{e', A}$  in the decomposition of  $w$  in the free basis  $(\lambda_F)_{F \in \mathbb{F}_b}$ , for some  $e' \in [A, F_\infty]_{\hat{T}}$ , then it appears in position  $\iota_{e', A} - \varepsilon_{e'}$  in the word  $\Theta_{A,B}(w)$ . Applying Lemma 3.1.4 again yields that

$$\left( \frac{d}{d|A|} - \frac{d}{d|B|} \right) W_S = -\mathbb{E} \left[ \text{Tr} \left( \left( \frac{1}{2} + \tilde{C}_A \right) (\sigma_S) \Theta_{A,B}(w)^\otimes(U_{F, |F|}, F \in \mathbb{F}_b) \right) \right], \quad (3.16)$$

where

$$\tilde{C}_A = \frac{1}{N} \sum_{\substack{e' \in [A, F_\infty]_{\hat{T}} \\ \text{traversed by } \mathcal{S}}} \varepsilon_{e(A)} \varepsilon_{e'} T_{\iota_{e(A), A}, \iota_{e'}, A - \varepsilon_{e'}}.$$

Consider now four faces satisfying the assumptions of the Proposition. Thanks to the "locality" of the relation (3.13) and to the consistency of the discrete Yang-Mills measures, one may further assume that the four faces around  $x$  are distinct, not equal to  $F_{\infty, \mathbb{G}}$  and that they do not disconnect  $\hat{\mathbb{G}}$ , that is, the graph  $(\hat{\mathbb{V}} \setminus \{F_1, \dots, F_4\}, \mathbb{E} \setminus \cup_{i=1}^4 \{e, F_i \in e\})$  is connected. Let us order the faces  $F_1, \dots, F_4$  counterclockwisely and choose a spanning tree  $T$  of  $\mathbb{G}$  such that  $F_2$  and  $F_3$  are leaves of  $\hat{T}$  and such that  $(F_3, F_4, F_1)$  and  $(F_2, F_1)$  are paths of  $\hat{T}$ , as is displayed in figure 3.4. Observe that the orientation of the four edges having  $x$  as endpoints, induced by the loops of  $\mathcal{S}$ , is the same as the one induced by such a spanning tree and that  $F_2$  (resp.  $F_3$ ) is the successor of  $F_1$  (resp.  $F_4$ ) for the orders  $\preceq_e$  with  $e$  an edge such that  $F_1, F_2 \in \hat{T}_{F_L(e)}$  (resp.

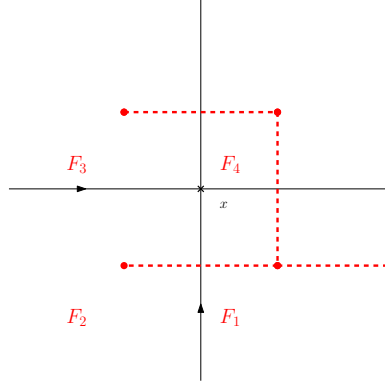


FIGURE 3.4 – A spanning tree of  $\hat{\mathbb{G}}$  that induces an orientation on the edges around  $x$  that matches the one induced by the loops crossing at  $x$  and such that  $F_2$  (resp.  $F_3$ ) is the successor of  $F_1$  (resp.  $F_4$ ) for the orders  $\preceq_e$ , with  $e$  an edge such that  $F_1, F_2 \in \hat{T}_{F_L(e)}$  (resp.  $F_3, F_4 \in \hat{T}_{F_L(e)}$ ).

$F_3, F_4 \in \hat{T}_{F_L(e)}$ ). The equation (3.15) combined with the invariance under  $\Theta_{F_3, F_4}$  and (3.16) applied respectively to  $\left(\frac{d}{d|F_3|} - \frac{d}{d|F_4|}\right) W_S$  and  $\left(\frac{d}{d|F_2|} - \frac{d}{d|F_1|}\right) W_S$  imply that

$$\mu_x \cdot W_S = \frac{1}{N} \mathbb{E} \left[ \text{Tr} \left( (\tilde{C}_{F_3} - C_{F_2})(\sigma_S) \Theta_{F_3, F_4}(w)^{\otimes} (U_{F, |F|}, F \in \mathbb{F}_b) \right) \right]. \quad (3.17)$$

The edges  $e(F_2)$  and  $e(F_3)$  are used consecutively by a loop of  $\mathcal{S}$  and the letters  $\lambda_{F_2}$  and  $\lambda_{F_3}$  are consecutives in the decomposition of  $\Theta_{F_3, F_4}(\beta_{e(F_2)} \beta_{e(F_3)}) = \lambda_{F_2} \lambda_{F_3}$  and of  $\Theta_{F_3, F_4}(\beta_{e'})$ , for any edge  $e' \in [F_1, F_\infty]$  that is used by  $\mathcal{S}$ . Therefore, for any edge  $e' \in [F_2, F_\infty]$  used by  $\mathcal{S}$ ,

$$T_{\iota_{e(F_3), F_3}, \iota_{e'}, F_3 - \varepsilon_{e'}}^{\varepsilon}(\sigma_S) = T_{\iota_{e(F_2), F_2}, \iota_{e'}, F_2}^{-\varepsilon}(\sigma_S).$$

The fact that  $\varepsilon_{e(F_3)} = \varepsilon_{e(F_2)} = 1$  yields that the equation (3.17) get simplified into

$$\mu_x \cdot W_S = \frac{1}{N} \mathbb{E} \left[ \text{Tr} \left( T_{\iota_{e(F_3), F_3}, \iota_{e(F_4), F_3} - \varepsilon_{e(F_4)}}^{\varepsilon}(\sigma_S) \Theta_{F_3, F_4}(w)^{\otimes} (U_{F, |F|}, F \in \mathbb{F}_b) \right) \right].$$

Denote by  $\tilde{w}_1, \dots, \tilde{w}_k$  the elements of  $\mathcal{S}_x$ , that instead of using consecutively  $e(F_2)$  and  $e(F_3)$ , use  $e(F_2)$  and turn along  $e(F_4)$ . Observe that the permutation  $\sigma_S$  sends  $\iota_{e(F_2), F_2}$  to  $\iota_{e(F_3), F_3}$ , whereas  $T_{\iota_{e(F_3), F_3}, \iota_{e(F_4), F_3} - 1}^{\varepsilon}(\sigma_S)$  sends  $\iota_{e(F_2), F_2}$  to  $\iota_{e(F_4), F_3} - 1 = \iota_{e(F_4), F_4}$  and

$$\text{Tr} \left( T_{\iota_{e(F_3), F_3}, \iota_{e(F_4), F_3} - 1}^{\varepsilon}(\sigma_S) \Theta_{F_3, F_4}(w)^{\otimes} (U_{F, |F|}, F \in \mathbb{F}_b) \right) = \prod_{i=1}^k \text{Tr} \left( \Theta_{F_3, F_4}(\tilde{w}_i) \right).$$

Using once again the invariance of the discrete Yang-Mills measure under  $\Theta_{F_3, F_4}$  implies that

$$\mu_x \cdot W_S = \frac{1}{N} \mathbb{E} \left[ \prod_{i=1}^k \text{Tr}(\tilde{w}_i) \right] = \frac{1}{N} W_{\mathcal{S}_x}.$$

□

If  $x \in \mathbb{V}$  is a point of intersection point of one loop  $l \in \mathcal{S}$ , we denote respectively by  $\tilde{l}_x^L$  and  $\tilde{l}_x^R$  the loop that turns left and the loop that turns right at  $x$ . If  $x$  is the intersection point of two different loops  $l_1$  and  $l_2$  of  $\mathcal{S}$ , we denote by  $l_1 \circ_x l_2$  the concatenation of  $l_1$  and  $l_2$  at the point  $x$ .



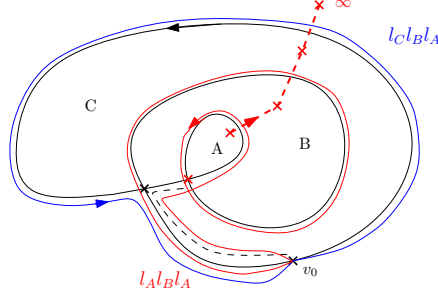


FIGURE 3.5 – Makeenko-Midgal

**Theorem 3.4.3.** Let  $\mathcal{S} = \{l_1, \dots, l_m\}$  be a regular skein,  $x \in \mathbb{V}_{\mathcal{S}}$  a point of intersection and  $F_1, \dots, F_4$  faces around  $x$  numbered as in Proposition 3.4.2. If  $x$  is the intersection point of two different loops  $l_1$  and  $l_2$ ,

$$\left( \frac{d}{d|F_1|} - \frac{d}{d|F_2|} + \frac{d}{d|F_3|} - \frac{d}{d|F_4|} \right) \Phi^N(\mathcal{S}) = \Phi^N(l_1 \circ_x l_2, l_3, \dots, l_m). \quad (*)$$

If  $x$  is an intersection point of the loop  $l_1$ , then

$$\begin{aligned} \left( \frac{d}{d|F_1|} - \frac{d}{d|F_2|} + \frac{d}{d|F_3|} - \frac{d}{d|F_4|} \right) \Phi^N(\mathcal{S}) = & \sum_{\substack{\mathcal{S}_x^L \sqcup \mathcal{S}_x^R = \mathcal{S}_x \\ \tilde{l}_{1,x}^L \in \mathcal{S}_x^L \text{ and } \tilde{l}_{1,x}^R \in \mathcal{S}_x^R}} \Phi^N(\mathcal{S}_x^L) \Phi^N(\mathcal{S}_x^R) \quad (**) \\ & + \frac{1}{N^2} \Phi^N(\tilde{l}_x^R, \tilde{l}_x^L, l_2, \dots, l_m). \end{aligned}$$

Moreover, if  $F \in \mathbb{F}_b$  is a neighbour face of the unbounded face, then

$$\frac{d}{d|F|} \Phi^N(\mathcal{S}) = -\frac{1}{2} \Phi^N(\mathcal{S}). \quad (***)$$

*Proof.* For any skein  $\{l_1, \dots, l_m\}$  of  $m$  loops and any  $\pi, \mathcal{V} \in \mathcal{P}_m$  with  $\pi \leq \mathcal{V}$ , let us set  $\mathbb{E}_{\pi}[l_1, \dots, l_m] = \prod_{B \in \pi} \mathbb{E}[\prod_{i \in B} \text{Tr}(H_{l_i})]$ ,  $k_{\mathcal{V}}[l_1, \dots, l_m] = \prod_{B \in \mathcal{V}} k_{\#B}^N(\text{Tr}(H_{l_i}), i \in B)$  and  $k_{\pi, \mathcal{V}} = k_{\pi, \mathcal{V}}(\text{Tr}(H_{l_i}), i \in \{1, \dots, m\})$ . We shall consider the normalized cumulant

$$\Phi_{\pi}(l_1, \dots, l_m) = \prod_{B \in \pi} \Phi(l_i, i \in B) = N^{m-2\#\pi} k_{\pi}(l_1, \dots, l_m).$$

Assume that  $x$  is an intersection point of  $l_1$ . For any partition  $\mathcal{V}$  of  $\{1, \dots, m+1\}$  connecting 1 with 2, denote by  $\mathcal{V}'$  the partition of  $\{1, \dots, m\}$  obtained by identifying 1 with 2. Then for any partition  $\mathcal{V} \in \mathcal{P}_{m+1}$  connecting 1 with 2,

$$\begin{aligned} \sum_{1_{\{1,2\}} \leq \pi \leq \mathcal{V}} N \mu_x k_{\pi'}(l_1, l_2, \dots, l_m) &= \sum_{\pi \leq \mathcal{V}'} N \mu_x k_{\pi}(l_1, l_2, \dots, l_m) \\ &= N \mu_x \mathbb{E}_{\mathcal{V}'}[l_1, l_2, \dots, l_m] = \mathbb{E}_{\mathcal{V}'}[\tilde{l}_{1,x}^L \tilde{l}_{1,x}^R, l_2, \dots, l_m] \\ &= \mathbb{E}_{\mathcal{V}}[\tilde{l}_{1,x}^L, \tilde{l}_{1,x}^R, l_2, \dots, l_m]. \end{aligned}$$

Therefore, for any partition  $\pi \in \mathcal{P}_{m+1}$  connecting 1 and 2,

$$k_{1_{\{1,2\}}, \pi}(\tilde{l}_{1,x}^L, \tilde{l}_{1,x}^R, \dots, l_m) = N\mu_x k_{\pi'}(l_1, l_2, \dots, l_m).$$

In particular,

$$\begin{aligned} \mu_x \Phi^N(l_1, \dots, l_m) &= N^{m-3} k_{1_{\{1,2\}}, 1_{m+1}}(\tilde{l}_{1,x}^L, \tilde{l}_{1,x}^R, \dots, l_m) \\ &= \sum_{\substack{\pi \in \mathcal{P}_{m+1} \\ \pi \vee 1_{\{1,2\}} = 1_{m+1}}} N^{m-3} k_{\pi}(\tilde{l}_{1,x}^L, \tilde{l}_{1,x}^R, \dots, l_m) \\ &= \sum_{\substack{\pi \in \mathcal{P}_{m+1} \\ \pi \vee 1_{\{1,2\}} = 1_{m+1}}} N^{2|\pi|-4} \Phi_{\pi}(\tilde{l}_{1,x}^L, \tilde{l}_{1,x}^R, \dots, l_m) \end{aligned}$$

If  $\pi \in \mathcal{P}_{m+1}$  satisfies  $\pi \vee 1_{\{1,2\}} = 1_{m+1}$ , then, whether  $|\pi| = 1$  or  $|\pi| = 2$  and the equation (\*\*)  
follows. Assume now that  $x$  is an intersection point of  $l_1$  with  $l_2$ . Then, for any partition  $\pi \in \mathcal{P}_m$ ,

$$\mu_x \mathbb{E}_{\pi}(l_1, l_2, \dots, l_m) = \begin{cases} \frac{1}{N} \mathbb{E}_{\pi}(l_1 \circ_x l_2, \dots, l_m) & , \text{ if 1 and 2 are in the same block of } \pi, \\ 0 & , \text{ otherwise.} \end{cases}$$

Note that for any partition  $\pi \in \mathcal{P}_m$ , such that 1 and 2 are not in the same block of  $\pi$ ,  $\mu_x k_{\pi}(l_1, l_2, \dots, l_m) = 0$ . For any partition  $\pi \in \mathcal{P}_{m-1}$ , denote by  $\tilde{\pi} \in \mathcal{P}_m$  the partition obtained by shifting  $\pi$  by 1 and adding 1 to the block containing 2. For any partition  $\nu \in \mathcal{P}_{m-1}$ ,

$$\begin{aligned} \sum_{\pi \leq \nu} N\mu_x k_{\tilde{\pi}}(l_1, l_2, l_3, \dots, l_m) &= \sum_{\mathcal{W} \leq \tilde{\nu}} N\mu_x k_{\mathcal{W}}(l_1, l_2, l_3, \dots, l_m) \\ &= N\mu_x \mathbb{E}_{\tilde{\nu}}[l_1, l_2, \dots, l_m] = \mathbb{E}_{\nu}[l_1 \circ_x l_2, l_3, \dots, l_m]. \end{aligned}$$

It follows that for any partition  $\pi \in \mathcal{P}_{m-1}$ ,

$$\mu_x k_{\tilde{\pi}}(l_1, l_2, \dots, l_m) = \frac{1}{N} k_{\pi}(l_1 \circ_x l_2, l_3, \dots, l_m).$$

For  $\pi = 1_{m-1}$ , the latter equality yields

$$\mu_x \Phi^N(l_1, l_2, \dots, l_m) = \Phi^N(l_1 \circ_x l_2, l_3, \dots, l_m).$$

□

Observe that equations (\*) and (\*\*\*) on  $\Phi^N$  do not depend on  $N$ .

### 3.4.2 Generalized Kazakov basis

For any regular skein  $\mathcal{S}$ , denote by  $\tilde{\mathbb{G}}_{\mathcal{S}} = (\mathbb{V}_{\mathcal{S}}, \mathbb{E}_{\mathcal{S}}, \mathbb{F}_{\mathcal{S}})$  an embedded graph such that  $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(\tilde{\mathbb{G}}_{\mathcal{S}})$  minimizing  $\#\mathbb{E}_{\mathcal{S}}$  and  $\#\mathbb{V}_{\mathcal{S}}$ . We warn the Reader that the image of edges of  $\tilde{\mathbb{G}}_{\mathcal{S}}$  are not necessarily contained in the image of loops of  $\mathcal{S}$  and that  $\tilde{\mathbb{G}}_{\mathcal{S}}$  is not always unique. Consider  $\mathcal{G}_{\mathcal{S}} = (\mathcal{S}, E_{\mathcal{S}})$  the graph with vertices indexed by  $\mathcal{S}$ , such that two loops are connected in  $\mathcal{G}_{\mathcal{S}}$  if and only if they intersect each other. Then, images of edges of  $\tilde{\mathbb{G}}_{\mathcal{S}}$  are included in the images

of loops of  $\mathcal{S}$  if and only if  $\mathcal{G}_{\mathcal{S}}$  is connected. In that case,  $\tilde{\mathbb{G}}_{\mathcal{S}}$  is the unique finest embedded graph such that  $\mathcal{S} \subset P(\mathbb{G}_{\mathcal{S}})$ . In this section, we shall fix a skein  $\mathcal{S}$  such that  $\mathcal{G}_{\mathcal{S}}$  is connected and set  $\mathbb{G} = \tilde{\mathbb{G}}_{\mathcal{S}}$ . Let  $\mathbb{E}^+$  and  $\lambda$  be respectively the orientation and the permutation of the edges  $\mathbb{E}$  induced by  $\mathcal{S}$ . We want now to determine whether area-derivative operators can be obtained by linear combinations of the operators appearing on the left-hand-side of Theorem 3.4.3. To that purpose, let us set

$$\begin{aligned} \mu : \mathbb{C}^{\mathbb{F}} &\longrightarrow \mathbb{C}^{\mathbb{E}^+} \\ u &\longmapsto \left( e \mapsto u(F_L(e)) - u(F_R(e)) - u(F_L(\lambda^{-1}(e))) + u(F_R(\lambda^{-1}(e))) \right). \end{aligned}$$

For any loop  $l \in L(\mathbb{G})$ , denote respectively by  $n_l \in \mathbb{C}^{\mathbb{F}}$  and  $\delta_l \in \mathbb{C}^{\mathbb{E}^+}$  the winding number function of  $l$  and the function  $\sum_{l \text{ traverses } e} \delta_e$ . For any  $v \in \mathbb{V}$ , set

$$*_v = \sum_{e \in \text{Out}(v)} \delta_e.$$

The following lemma is proved in [35][ Lemma 6.28.].

**Lemma 3.4.4.** *i) The kernel of  $\mu$  is the vector space spanned by  $\{n_{l_1}, n_{l_2}, \dots, n_{l_m}, 1_{\mathbb{F}}\}$ .  
ii) The image of  $\mu$  is the orthogonal space to  $\{*_v, v \in \mathbb{V}\} \cup \{\delta_l, l \in \mathcal{S}\}$ .  
iii) The intersection of linear spaces spanned by  $\{*_v, v \in \mathbb{V}\}$  and  $\{\delta_l, l \in \mathcal{S}\}$  is  $\mathbb{C}1_{\mathbb{E}^+}$ .*

Lemma 3.4.4 yields that  $\dim(\text{Im}(\mu)) = \#\mathbb{F} - m - 1 = \#\mathbb{F}_b - m$ . We have a first answer to our question : for any regular skein  $\mathcal{S}$ , the vector space spanned by the operators  $\{\mu(\nabla_{\mathbf{a}})(e), e \in \mathbb{E}^+\}$  is not  $\text{span}(\{\frac{d}{d[F]}, F \in \mathbb{F}_b\})$ . Nonetheless, for some skeins, the third condition (\*\*\*) allows to complete the lacking information.

**Lemma 3.4.5.** *Suppose that there exist  $m$  distinct faces  $F_1, \dots, F_m$  of  $\mathbb{G}$ , neighbours of the unbounded face such that for any  $i \in \{1, \dots, m\}$ ,  $l_i$  is bounding  $F_i$ . Let  $\mathbb{F}_{\infty,1} = \{F_{\infty}, F_1, \dots, F_m\}$ . Then, the application*

$$\begin{aligned} \bar{\mu} : \mathbb{C}^{\mathbb{F}} &\longrightarrow \text{Im}(\mu) \oplus \mathbb{C}^{\mathbb{F}_{\infty,1}} \\ u &\longmapsto (\mu(u), u|_{\mathbb{F}_{\infty,1}}) \end{aligned}$$

*is an isomorphism.*

*Proof.* Thanks to Lemma 3.4.4, the source and the target of  $\mu$  have the same dimension. If  $u \in \ker(\mu)$ , then there exists  $\alpha \in \mathbb{C}^{m+1}$  such that  $u = \alpha_{n+1}1_{\mathbb{F}} + \sum_{i=1}^m \alpha_i n_{l_i}$ . Moreover,  $u(F_{\infty}) = \alpha_{n+1}$  and for any  $i \in \{1, \dots, m\}$   $u(F_i) = \alpha_i$ . It follows that  $\ker(\bar{\mu}) = \{0\}$ .  $\square$

We call a skein satisfying the condition of the Lemma a *skein based at infinity*. Note that each vertex of  $\mathbb{G}$  has degree 4, hence  $\#\mathbb{E} = 2\#\mathbb{V}$  and Euler relation implies  $\#\mathbb{F} = \#\mathbb{V} + 2$ . Therefore  $\dim(\text{Im}(\mu)) = \#\mathbb{V} - m + 1$ . For any vertex  $v \in \mathbb{V}$ , let  $e_1(v)$  and  $e_2(v)$  be the two outgoing edges at  $v$  ordered clockwise and set

$$\alpha_v = \delta_{e_1(v)} - \delta_{e_2(v)} \in \mathbb{C}^{\mathbb{E}^+}.$$

Let us denote respectively by  $\mathbb{V}_s$  and  $\mathbb{V}_f$  the set of self-intersection points of each loops and the set of intersection points of pair of distinct loops of  $\mathcal{S}$ . The type of crossing induces on  $\mathbb{V}_f$  an

equivalence relation  $\sim$  such two points  $x$  and  $y$  are equivalent if they belong to the same loops. For any pair of distinct points  $x, y \in \mathbb{V}_f$  such that  $x \sim y$ , denote by  $\beta_{x,y}$  the function on  $\mathbb{E}^+$  that is  $\alpha_x + \varepsilon_{x,y}\alpha_y$ , where  $\varepsilon_{x,y} = 1$ , if  $e_1(x)$  and  $e_1(y)$  belong to different loops and  $-1$  otherwise.

**Lemma 3.4.6.** *i) For any  $v \in \mathbb{V}_s$  and any pair of vertices  $x, y \in \mathbb{V}_f$  belonging to the same pair of loops,  $\alpha_v, \beta_{x,y} \in \text{Im}(\mu)$ .  
ii) Let  $T_f$  be a spanning acyclic directed subgraph of the complete graph on  $\mathbb{V}_f$  such that connected components of  $T_f$  are the equivalence class of  $\sim$  on  $\mathbb{V}_f$ . The family  $\{\alpha_v : v \in \mathbb{V}_s\} \cup \{\beta_{x,y} : (x, y) \in T_f\}$  is a free family of  $\text{Im}(\mu)$  and is a basis if and only  $\mathcal{G}_S$  is a tree.*

*Proof.* i) Indeed, for any  $v \in \mathbb{V}_s$  and  $x, y \in \mathbb{V}_f$  belonging to the same two of loops, the vectors  $\alpha_v$  and  $\beta_{x,y}$  are orthogonal to  $\{*_v, v \in \mathbb{V}\}$  and  $\{\delta_l, l \in \mathcal{S}\}$ .

ii) It is easy to see that thanks to the acyclicity of the graph  $T_f$ , the family  $\{\alpha_v : v \in \mathbb{V}_s\} \cup \{\beta_{x,y} : (x, y) \in T_f\}$  is free. Moreover, its cardinality is  $\#\mathbb{V} - m'$ , where  $m'$  is the number of connected components of  $T_f$ . The latter are in bijection with edges of  $\mathcal{G}_S$ . Recall that  $\mathcal{G}_S$  is connected so that  $m' = m - 1$  if and only if  $\mathcal{G}_S$  is a tree. To conclude, recall that  $\dim(\text{Im}(\mu)) = \#\mathbb{V} - m + 1$ .  $\square$

If  $\mathcal{S}$  is made of a pair of loops that intersect each other, then the conclusion of ii) of Lemma 3.4.6 trivially holds, we give an example of such a basis in figure 3.6. There is a choice of directed acyclic graph that makes the decomposition in the basis easier, namely in each equivalence class of  $\mathbb{V}_f$ , choose a base point and connect any other point towards it. If  $R_S$  is a set of class representatives for  $\sim$ , for any  $v \in \mathbb{V}_f$ , we denote by  $\bar{v}$  the unique element of  $R_S$  equivalent to  $v$ .

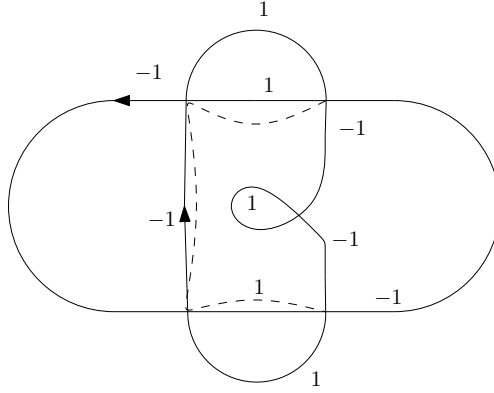


FIGURE 3.6 – Here is the basis of  $\text{Im}(\mu)$  associated to the spanning tree on  $\mathbb{V}_f$  drawn with dashed lines. In this example, if the supports of two basis functions intersect, then the two functions take the same value on this intersection that we print on the edge.

**Lemma 3.4.7.** *Let  $R_S$  be set of class representatives of  $\sim$ , the family  $\{\alpha_v, v \in \mathbb{V}_s\} \cup \{\beta_{v,\bar{v}}, v \in \mathbb{V}_f \setminus R_S\}$  is a free family and for any function  $\varphi$  belonging to its span,*

$$\varphi = \sum_{v \in \mathbb{V}_s} \varphi(e_1(v))\alpha_v + \sum_{v \in \mathbb{V}_f \setminus R_S} \varphi(e_1(v))\beta_{v,\bar{v}}. \quad (3.18)$$

These free-families have the following pre-image under the function  $\mu$ . For any  $v \in \mathbb{V}_s$ , let  $l_v$  be the loop that starts with  $e_1(v)$  and stops at its first return at  $v$ . For any pair  $(x, y)$  of distinct

vertices in  $\mathbb{V}_f$  that are intersection of the same pair of loops, let  $l_{x,y}$  be the loop that starts with  $e_1(x)$ , uses the same loop until it reaches  $y$  and then goes back to  $x$  using the second loop. See figure 3.7, where we draw the pre-image of the family described in figure 3.6.

**Lemma 3.4.8.** *For any  $v \in \mathbb{V}_s$  and any pair  $(x, y)$  of distinct equivalent vertices of  $\mathbb{V}_f$ ,*

$$\mu(n_{l_v}) = \alpha_v \quad (3.19)$$

and

$$\mu(n_{l_{x,y}}) = \beta_{x,y}. \quad (3.20)$$

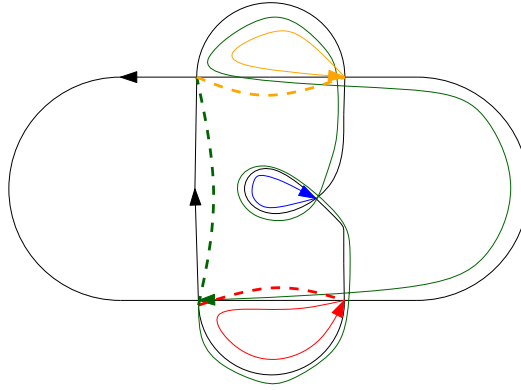


FIGURE 3.7 – The application  $\mu$  maps the winding number functions of loops drawn on this figure to the basis represented in figure 3.6. These family of winding number functions completed by the winding number functions of elements of  $\mathcal{S}$  is a basis of  $\mathbb{C}^{\mathbb{F}}$ .

If  $\mathcal{G}_{\mathcal{S}}$  have cycles, we shall complete<sup>7</sup> the basis given by Lemma 3.4.6 in the following way. For each edge  $(l_1, l_2) \in E_{\mathcal{S}}$ , we denote by  $v_{l_1, l_2}$  the element of  $R_{\mathcal{S}}$  at the intersections of  $l_1$  and  $l_2$ . For each edge  $(l, l') \in E_{\mathcal{S}} \setminus T_{\mathcal{S}}$ , consider the unique path  $(l_1, l_2, \dots, l_k)$  in  $T_{\mathcal{S}}$  from  $l$  to  $l'$  and for any  $i \in \{1, \dots, k\}$ , let  $c_i$  be the regular path that is the restriction of  $l_{i+1}$  such that  $\underline{c}_i = v_{l_i, l_{i+1}}$ ,  $\overline{c}_i = v_{l_{i+1}, l_{i+2}}$  (where loops are indexed by  $\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$ ). The concatenation  $c_1 c_2 \dots c_k$  is a loop of  $\mathbb{G}$ , that follows elements of the cycle  $(l_1, l_2, \dots, l_k, l_1)$  and change from one strand to another at the points of  $R_{\mathcal{S}}$ . The application  $\mu$  maps the loop  $\tilde{l}_{l, l'}$  to

$$\gamma_{l, l'} = \mu(\tilde{l}_{l, l'}) = \varepsilon_1 \alpha_{v_{l_1, l_2}} + \varepsilon_2 \alpha_{v_{l_2, l_3}} + \dots + \varepsilon_k \alpha_{v_{l_k, l_1}},$$

where for any  $i \in \mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$ ,  $\varepsilon_i = 1$ , if  $e_1(x_i) \in l_{i+1}$  and  $-1$  if  $e_1(x_i) \in l_i$  (with the above notation,  $\varepsilon_i = \varepsilon_{v_{l_{i-1}, l_i}, v_{l_i, l_{i+1}}}$ ). Let us write  $\varepsilon_{l', l} = \varepsilon_k$ .

**Lemma 3.4.9.** *The family  $\{\alpha_v : v \in \mathbb{V}_s\} \cup \{\beta_{v, \bar{v}} : v \in \mathbb{V}_f \setminus R_{\mathcal{S}}\} \cup \{\gamma_{l, l'} : (l, l') \in E_{\mathcal{S}} \setminus T_{\mathcal{S}}\}$  is a basis of  $\text{Im}(\mu)$ . Moreover for any function  $\varphi \in \mathbb{C}^{\mathbb{E}^+}$  belonging to  $\text{Im}(\mu)$ ,*

<sup>7</sup>. Note that such considerations are not useful to compute the correlation functions of the Gaussian master field thanks to Makeenko-Midgal relations.

$$\begin{aligned}
\varphi = & \sum_{v \in \mathbb{V}_s} \varphi(e_1(v)) \alpha_v + \sum_{v \in \mathbb{V}_f \setminus R_S} \varphi(e_1(v)) \beta_{v, \bar{v}} \\
& + \sum_{(l, l') \in E_S \setminus T_S} \varepsilon_{l, l'} \left( \varphi(e_1(\overline{v_{l, l'}})) - \sum_{\bar{v} = v_{l, l'}} \varepsilon_{v, v_{l, l'}} \varphi(e_1(v)) \right) \gamma_{l, l'}.
\end{aligned} \tag{K}$$

*Proof.* First, we should notice that  $\#R_S = \#E_S = m - 1 + \#E_S \setminus T_S$  and that this family has the good cardinality :

$$\#\mathbb{V}_s + (\#\mathbb{V}_f - (m - 1) - \#(E_S \setminus T_S)) + \#(E_S \setminus T_S) = \#\mathbb{V} - m + 1 = \dim(\text{Im}(\mu)).$$

To conclude, we check that the relation (K) holds true for any function  $\varphi$  in the span of this family. We denote by  $R'$  the subset of  $R_S$  representing classes indexed by  $E_S \setminus T_S$ . Let  $c \in \mathbb{C}^{\mathbb{V} \setminus R_S \cup R'}$  be a vector such that  $\varphi = \sum_{v \in \mathbb{V}_s} c_v \alpha_v + \sum_{v \in \mathbb{V}_f \setminus R_S} c_v \beta_{v, \bar{v}} + \sum_{(l, l') \in E_S \setminus T_S} c_{v_{l, l'}} \gamma_{l, l'}$ . Let  $r$  belong to  $R'$  and let  $(l, l')$  be the edge  $E_S \setminus T_S$  such that  $r \in l \cap l'$ . Then,  $\gamma_{l, l'}(e_1(r)) = \varepsilon_{l', l}$  and for any  $v \in \mathbb{V}_f \setminus R_S$ , such that  $\bar{v} = r$ ,  $\beta_{v, r}(e_1(r)) = \varepsilon_{v, r}$ , whereas  $e_1(r)$  cancels any other element of the family. What is more, for any  $v \in \mathbb{V} \setminus R_S$ ,  $\gamma_{l, l'}(e_1(v)) = 0$ . This computation immediatly yields the formula (K).  $\square$

Let us give the simplest example, where  $\mathcal{G}_S$  is not a tree, that is when  $\mathcal{S}$  is made of three cycles that intersect each others twice. The graph  $\mathcal{G}_S$  is a triangle, we choose as set of representatives the three points of intersections lying on the boundary of  $F_\infty$ . We draw on figure the families of loops one get when the circles have the same orientation.

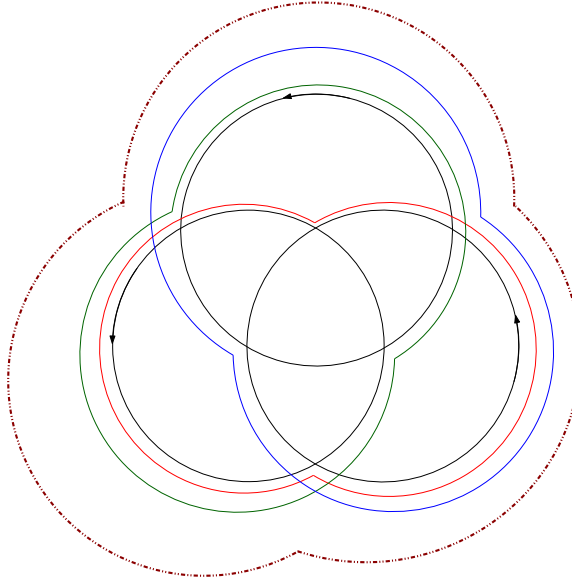


FIGURE 3.8 – Here is the loops that are mapped to the basis  $\beta$  and  $\gamma$ , for three circles counterclockwisely oriented. The class representative of  $\sim$  are taken on the boundary of  $F_\infty$ . In this case, the loop  $\tilde{l}_{l, l'}$  does not depend on the choice of the spanning tree of  $\mathcal{G}_S$  and is drawn with dashed lines, whereas the family  $\beta$  has three elements.

Let us see how the above construction answer our initial question. For any loop  $l \in \mathcal{S}$ ,  $\bar{\mu}(n_l) = \varepsilon_l 1_{F_l} \in \mathbb{C}^{\mathbb{F}_{\infty,1}}$ , where  $\varepsilon_l = n_l(F_l) \in \{-1, 1\}$ . Hence, for any set of class representatives  $R_{\mathcal{S}}$  for  $\sim$  and  $T_{\mathcal{S}}$  a spanning tree of  $\mathcal{G}_{\mathcal{S}}$ , the family  $\{n_{l_{v,\bar{v}}}, v \in \mathbb{V}_{\mathcal{S}} \setminus R_{\mathcal{S}}\} \cup \{n_{l_v}, v \in \mathbb{V}_{\mathcal{S}}\} \cup \{n_{\tilde{l}_{l,l'}} : (l, l') \in E_{\mathcal{S}} \setminus T_{\mathcal{S}}\} \cup \mathcal{S} \cup \{1_{\mathbb{F}}\}$  is a basis of  $\mathbb{C}^{\mathbb{F}}$  and its image under  $\bar{\mu}$  is the free family  $\{\alpha_v, v \in \mathbb{V}_{\mathcal{S}}\} \cup \{\beta_{x,y}, (x, y) \in T_f\} \cup \{\gamma_{l,l'}, (l, l') \in E_{\mathcal{S}} \setminus T_{\mathcal{S}}\}$  completed by the canonical basis of  $\mathbb{C}^{\mathbb{F}_{\infty,1}}$ . Moreover, for any  $\varphi \in \text{Im}(\mu) \oplus \mathbb{C}^{\mathbb{F}_{\infty,1}} \subset \mathbb{C}^{\mathbb{E}^+} \oplus \mathbb{C}^{\mathbb{F}_{\infty,1}}$ ,

$$\begin{aligned} \varphi = & \sum_{v \in \mathbb{V}_s} \varphi(e_1(v)) \alpha_v + \sum_{v \in \mathbb{V}_f \setminus R_{\mathcal{S}}} \varphi(e_1(v)) \beta_{x,y} + \sum_{F \in \mathbb{F}_{\infty,1}} \varphi(F_l) \delta_F \\ & + \sum_{(l,l') \in E_{\mathcal{S}} \setminus T_{\mathcal{S}}} \varepsilon_{l,l'} \left( \varphi(e_1(v_{l,l'})) - \sum_{\substack{v \in \mathbb{V}_f \\ \bar{v}=v_{l,l'}}} \varepsilon_{v,v_{l,l'}} \varphi(e_1(v)) \right) \gamma_{l,l'} \end{aligned} \quad (\star)$$

and

$$\begin{aligned} \bar{\mu}^{-1}(\varphi) = & \sum_{v \in \mathbb{V}_s} \varphi(e_1(v)) n_v + \sum_{v \in \mathbb{V}_f \setminus R_{\mathcal{S}}} \varphi(e_1(v)) n_{v,\bar{v}} + \sum_{l \in \mathcal{S}} \varepsilon_l \varphi(F_l) n_l \\ & + \sum_{(l,l') \in E_{\mathcal{S}} \setminus T_{\mathcal{S}}} \varepsilon_{l,l'} \left( \varphi(e_1(v_{l,l'})) - \sum_{\substack{v \in \mathbb{V}_f \\ \bar{v}=v_{l,l'}}} \varepsilon_{v,v_{l,l'}} \varphi(e_1(v)) \right) n_{\tilde{l}_{l,l'}}. \end{aligned}$$

If a skein is based at infinity, considering  $\varphi = \bar{\mu}(\nabla_{\mathbf{a}})$  yields a complete answer to our initial question. For any face  $F \in \mathbb{F}$ ,

$$\begin{aligned} \frac{d}{d|F|} = & \sum_{v \in \mathbb{V}_s} n_v(F) \mu(\nabla_{\mathbf{a}})(e_1(v)) + \sum_{v \in \mathbb{V}_f \setminus R_{\mathcal{S}}} n_{v,\bar{v}}(F) \mu(\nabla_{\mathbf{a}})(e_1(v)) + \sum_{l \in \mathcal{S}} \varepsilon_l n_l(F) \frac{d}{d|F_l|} \\ & + \sum_{(l,l') \in E_{\mathcal{S}} \setminus T_{\mathcal{S}}} \varepsilon_{l,l'} n_{\tilde{l}_{l,l'}}(F) \left( \mu(\nabla_{\mathbf{a}})(e_1(v_{l,l'})) - \sum_{\substack{v \in \mathbb{V}_f \\ \bar{v}=v_{l,l'}}} \varepsilon_{v,v_{l,l'}} \mu(\nabla_{\mathbf{a}})(e_1(v)) \right). \end{aligned} \quad (\diamond)$$

Using Theorem 3.4.3, we have an expression for all area derivatives of  $\Phi(\mathcal{S})$ , for any skein based at infinity and such that  $\mathcal{G}_{\mathcal{S}}$  is connected. What is more, note that if  $\mathcal{S}$  is based at infinity and  $\mathcal{G}_{\mathcal{S}}$  is not connected, then  $\Phi^N(\mathcal{S}) = 0$ . Nonetheless, observe that if  $v \in \mathbb{V}_s$ , it may happen, as in example of figure 3.7 at the only point of  $\mathbb{V}_s$ , that among the two skeins  $\mathcal{S}_v^L$  and  $\mathcal{S}_v^R$  obtained by splitting  $\mathcal{S}$  at  $v$ , one of them is not based at infinity. To solve this problem and compute the master field against all skeins, we could enlarge the type of loops families. Instead, observe that any skein can be obtained by putting some areas of a skein based at infinity to zero. We must now prove that these equations characterize the higher-order master field  $\Phi$ .

### 3.4.3 Complexity of skeins

We shall consider in this last section a slightly notion of embedded graph. We call a *multi-embedded graph in the plane* a triplet  $\mathbb{G} = (\mathbb{V}, \mathbb{E}, \mathbb{F}_b)$  satisfying the same conditions as an embedded graph as defined at the beginning of section 3.3.2 but where the element of  $\mathbb{F}$  are allowed to be non-simply connected.

Let us fix a regular skein  $\mathcal{S}$ . We let  $\mathbb{G}_{\mathcal{S}} = (\mathbb{V}_{\mathcal{S}}, \mathbb{E}_{\mathcal{S}}, \mathbb{F}_{\mathcal{S}})$  be the finest multi-connected embedded graph such that  $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(\mathbb{G}_{\mathcal{S}})$ . The graph  $\mathbb{G}_{\mathcal{S}}$  is connected if and only if  $\mathcal{G}_{\mathcal{S}}$  is connected. For any  $l \in \mathcal{P}(\mathbb{G}_{\mathcal{S}})$ , we consider

$$d_{\infty, \mathcal{S}}(l) = \inf\{d_{\hat{\mathbb{G}}_{\mathcal{S}}}(F, F_{\infty}) - 1 : F \in \hat{\mathbb{G}}_{\mathcal{S}}, F \cap F_{\infty, \mathbb{G}_{\{l\}}} = \emptyset\}.$$

Let  $I(\mathcal{S})$  be the number of intersections of  $\mathcal{S}$  and for any loop  $l \in \mathcal{S}$  denote by  $I_{\mathcal{S}}(l)$  the number of intersections of  $l$  with itself and other loops of  $\mathcal{S}$ . We define the *complexity* of  $\mathcal{S}$  to be the number

$$\mathcal{C}(\mathcal{S}) = I(\mathcal{S}) + 2 \sum_{l \in \mathcal{S}} d_{\infty, \mathcal{S}}(l).$$

**Example 3.4.10.** A skein  $\mathcal{S}$  is based at infinity if and only if  $\mathcal{C}(\mathcal{S}) = I(\mathcal{S})$ .

**Example 3.4.11.** If  $\mathcal{C}(\mathcal{S}) = 0$ , then  $\mathcal{S}$  is an union of closed Jordan curved bounding disjoint domains. Therefore,  $\Phi(\mathcal{S}) = 0$ , if  $\#\mathcal{S} \geq 2$  and  $e^{-\frac{|D|}{2}}$ , if  $\mathcal{S}$  has a single loop bounding a simply connected domain  $D$ .

**Lemma 3.4.12.** i) For any point of intersection  $v$  of a skein  $\mathcal{S}$ , if  $v \in \mathbb{V}_f$ ,

$$\mathcal{C}(\mathcal{S}_v) < \mathcal{C}(\mathcal{S})$$

and if  $v \in \mathbb{V}_s$ , for any partition  $\mathcal{S}_v^L \sqcup \mathcal{S}_v^R = \mathcal{S}_v$ ,

$$\max\{\mathcal{C}(\mathcal{S}_v^L), \mathcal{C}(\mathcal{S}_v^R)\} < \mathcal{C}(\mathcal{S}).$$

ii) For any regular skein  $\mathcal{S}$ , there exists a family  $(\mathcal{S}^\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$  of skeins based at infinity with  $\mathcal{C}(\mathcal{S}^\varepsilon) = \mathcal{C}(\mathcal{S})$  for any  $\varepsilon > 0$  and a family of smooth paths  $(r_l)_{l \in \mathcal{S}}$  such that for any  $l \in \mathcal{S}$ ,  $r_l \in l$  and  $\mathcal{S}^\varepsilon$  converges to  $\{r_l l r_l^{-1}, l \in \mathcal{S}\}$ , as  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

*Proof.* i) Assume that  $v \in \mathbb{V}_f$ . Then, for any loop  $l \in \mathcal{S}$ , that does not contain  $v$ ,  $l \in \mathcal{S}_v$  and  $d_{\infty, \mathcal{S}_v}(l) \leq d_{\infty, \mathcal{S}}(l)$ . If  $l_1$  and  $l_2$  are the two loops crossing at  $v$ , then  $d_{\infty, \mathcal{S}_v}(l_1 \circ_v l_2) \leq \min\{d_{\infty, \mathcal{S}}(l_1), d_{\infty, \mathcal{S}}(l_2)\}$ . Moreover,  $\mathbb{V}_s(\mathcal{S}_v) = \mathbb{V}_s(\mathcal{S})$  and for any  $w \in \mathbb{V}_s(\mathcal{S})$ ,  $d_{\infty, \mathcal{S}_v}(l_v) \leq d_{\infty, \mathcal{S}}(l_v)$ . Therefore, the fact that  $I(\mathcal{S}_v) = I(\mathcal{S}) - 1$  yields the expected inequality.

Assume now that  $v \in \mathbb{V}_s$ . Let  $l \in \mathcal{S}$  be the loop of  $\mathcal{S}$  crossing at  $v$ . Recall that  $l_{v,L}$  and  $l_v^R$  are the loops that turns respectively to the left and to right at  $v$  (so that they use respectively the edge  $e_1(v)$  and  $e_2(v)$ ). Fix a partition  $\mathcal{S}_v^L \sqcup \mathcal{S}_v^R$  of  $\mathcal{S}_v$  separating these two loops. For any loop  $l' \in \mathcal{S}_v \setminus \{l_v^L, l_v^R\}$ ,  $d_{\infty, \mathcal{S}_v^L}(l')$ ,  $d_{\infty, \mathcal{S}_v^R}(l') \leq d_{\infty, \mathcal{S}}(l')$ . Suppose that there exists a path  $c \in \mathcal{P}(\hat{\mathbb{G}}_{\mathcal{S}})$  such that  $F_{\infty, \mathbb{G}_{l_v^L}} \cap c = \emptyset$  and  $\ell(c) - 1 = d_{\infty, \mathcal{S}_v^L}(l_v) = d_{\infty, \mathcal{S}}(l)$ . Then, on the left side,  $I(\mathcal{S}_v^L) \leq I(\mathcal{S}_v) - 1$  and  $\mathcal{C}(\mathcal{S}_v^L) \leq \mathcal{C}(\mathcal{S}) - 1$ . The right side needs more caution. Consider the paths  $c^\pm \in \mathcal{P}(\hat{\mathbb{G}}_{\mathcal{S}_v})$  that start with  $(F^R(e_1(v)), F^L(e_1(v)))$ , board  $l_v^L$  respectively on the right and on the left, such that one path follows the orientation of  $l_{v,L}$  and the other goes in the reverse direction, until they cross  $c$  and then follow  $c$  up to  $F_{\infty, \mathbb{G}_{\mathcal{S}_v}}$ . Their combinatorial length satisfies

$$\ell(c^+) + \ell(c^-) \leq 2 + I_{\mathcal{S}_v}(l_v^L) + 2\ell(c).$$

Therefore,

$$d_{\infty, \mathcal{S}_v^R}(l_v^R) \leq \min\{\ell(c^+), \ell(c^-)\} - 1 \leq \frac{I_{\mathcal{S}_v}(l_v^L)}{2} + d_{\infty, \mathcal{S}}(l).$$



The number of intersections of the right skein  $\mathcal{S}_v^R$  is bounded by  $I(\mathcal{S} \setminus \{l\}) + I_{\mathcal{S}_v}(l_v^R)$ . Moreover, for any loop  $l' \in \mathcal{S}_v^R \setminus \{l_v^R\}$ ,  $d_{\infty, \mathcal{S}_v^R}(l') \leq d_{\infty, \mathcal{S}}(l')$ . It follows that

$$\mathcal{C}(\mathcal{S}_v^R) \leq I(\mathcal{S} \setminus \{l\}) + I_{\mathcal{S}_v}(l_v^R) + I_{\mathcal{S}_v}(l_{v,L}) + 2 \sum_{l' \in \mathcal{S} \setminus \{l\}} d_{\infty, \mathcal{S}}(l').$$

The equality  $I_{\mathcal{S}_v}(l_v^R) + I_{\mathcal{S}_v}(l_v^L) + I(\mathcal{S} \setminus \{l\}) = I(\mathcal{S}_v) = I(\mathcal{S}) - 1$  concludes.

ii) For each  $l \in \mathcal{S}$ , such that  $d_{\infty, \mathcal{S}}(l) > 0$ , consider a self-avoiding path  $c_l \in \mathcal{P}(\hat{\mathbb{G}}_{\mathcal{S}})$  such that  $F_{\infty, \mathbb{G}_l} \cap \underline{c}_l = \emptyset$  and  $\bar{c}_l = F_{\infty}(\mathbb{G}_{\mathcal{S}})$ . Choose such a family  $(c_l)_{l \in \mathcal{S}}$  of loops that do not cross each other but may be merged with one another. Deform each loop  $l$  along  $c_l$  into  $\tilde{l}$  so that the deformation intersects exactly twice each dual edge of  $c_l$  and does not intersect the deformation of other loops. Denote by  $\tilde{\mathcal{S}}$  the skein  $\{\tilde{l} : l \in \mathcal{S}, d_{\infty, \mathcal{S}}(l) > 0\} \cup \{l : l \in \mathcal{S}, d_{\infty, \mathcal{S}}(l) = 0\}$ . By construction, for any  $l \in \tilde{\mathcal{S}}$ ,  $d_{\infty, \tilde{\mathcal{S}}}(l) = 0$  and

$$\mathcal{I}(\tilde{\mathcal{S}}) = I(\mathcal{S}) + 2 \sum_{l \in \mathcal{S}} (|c_l| - 1) = \mathcal{C}(\mathcal{S}).$$

Each path  $c_l \in \mathcal{P}(\hat{\mathbb{G}}_{\mathcal{S}})$  induces a path  $\tilde{c}_l \in \mathcal{P}(\hat{\mathbb{G}}_{\tilde{\mathcal{S}}})$  such that faces belonging to  $\tilde{c}_l$  are boarded by  $\tilde{l}$ . When the areas  $(|F|)_{F \in \cup_{l \in \mathcal{S}} c_l}$  go to zero, the vector of random variables  $(H_l)_{l \in \tilde{\mathcal{S}}}$  converges in distribution to  $(H_{r_l l_{r_l}^{-1}})$ , where  $r_l$  are smooth paths such that  $\underline{r}_l \in l$ . For any loop  $l \in \mathcal{S}$ ,  $H_{r_l l_{r_l}^{-1}} = H_{r_l}^{-1} H_l H_{r_l}$  and  $\text{Tr}(H_{r_l l_{r_l}^{-1}}) = \text{Tr}(H_l)$ . Considering  $\Phi^N(\tilde{\mathcal{S}})$  and  $\Phi^N(\mathcal{S})$  as functions of  $(|F|)_{F \in \mathbb{F}_{\tilde{\mathcal{S}}}}$ , it follows that

$$\Phi^N(\tilde{\mathcal{S}}) \rightarrow \Phi^N(\mathcal{S}),$$

as  $(|F|)_{F \in \mathbb{F}_{\tilde{\mathcal{S}}}} \rightarrow 0$ . □

We can now solve our differential system recursively ordering skeins by their complexity. Recall that if  $x$  is a point of intersection of a skein  $\mathcal{S}$ , then  $\mu_x = \frac{d}{d|F_1|} - \frac{d}{d|F_2|} + \frac{d}{d|F_3|} - \frac{d}{d|F_4|}$ , where  $F_1, F_2, F_3$  and  $F_4$  are faces around the vertex  $v$  in cyclic order and  $F_1$  is the face bounded by the two outgoing edges of  $x$ . For any pair of skeins  $\mathcal{S}$  and  $\mathcal{S}'$ , let us say that  $\mathcal{S}$  and  $\mathcal{S}'$  are equivalent and write  $\mathcal{S} \sim \mathcal{S}'$  if there exists a family  $\{c_l, l \in \mathcal{S}\}$  of paths of  $\mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$  such that  $\underline{c}_l \in l$  for any  $l$  and  $\mathcal{S}' = \{c_l l c_l^{-1}, l \in \mathcal{S}\}$ .

**Theorem 3.4.13.** *There exists a unique function  $\Phi$  on skeins satisfying the following equations.*

1.  $\Phi(\{1\}) = 1$ .
2. If  $\mathcal{S}^-$  and  $\mathcal{S}^+$  are two skeins that are separated by a closed Jordan curve,  $\Phi(\mathcal{S}^- \sqcup \mathcal{S}^+) = 0$ .
3.  $\Phi$  is continuous for the topology of 1-variation.
4. If  $\mathcal{S} \sim \mathcal{S}'$ , then  $\Phi(\mathcal{S}') = \Phi(\mathcal{S})$ .
5. For any area-preserving diffeomorphism  $g$  of the plane,  $\Phi \circ g = \Phi$ .
6. For any regular skein  $\mathcal{S}$ ,  $\Phi$  is differentiable with respect to  $(|F|)_{F \in \mathbb{F}_{\mathcal{S}}}$  and satisfy the following differential equations. If  $x$  is the intersection of two different loops,

$$\mu_x \Phi(\mathcal{S}) = \Phi(\mathcal{S}_x). \quad (3.21)$$

If  $x$  is the intersection of a loop of  $\mathcal{S}$  with itself,

$$\mu_x \Phi(\mathcal{S}) = \sum_{\substack{\mathcal{S}_x^L \sqcup \mathcal{S}_x^R = \mathcal{S}_x \\ \tilde{l}_{1,x}^L \in \mathcal{S}_x^L \text{ and } \tilde{l}_{1,x}^R \in \mathcal{S}_x^R}} \Phi^N(\mathcal{S}_x^L) \Phi^N(\mathcal{S}_x^R). \quad (3.22)$$

For any face  $F \in \mathbb{F}_{\mathcal{S}}$ , neighbour of  $F_{\infty}$ ,

$$\frac{d}{d|F|}\Phi(\mathcal{S}) = -\frac{1}{2}\Phi(\mathcal{S}). \quad (3.23)$$

*Proof.* The function  $\Phi^N$  satisfies by construction the point 1.-4.. For any regular skein  $\mathcal{S}$ ,  $\Phi^N(\mathcal{S})$  is analytic in  $(|F|)_{F \in \mathbb{F}_{\mathcal{S}}}$ , satisfies  $(*)$ ,  $(**)$  and  $(***)$  and converges uniformly on every compact set of  $\mathbb{R}_+^{\mathbb{F}_{\mathcal{S}}}$  to the function  $\Phi(\mathcal{S})$ . Therefore,  $\Phi(\mathcal{S})$  is analytic and satisfies the equations of point 5. Let us now consider the question of uniqueness. Let  $\Psi$  be a function on finite skeins satisfying point 1 to 5. Using points 3 and 4, it is enough to prove that  $\Psi(\mathcal{S}) = \Phi(\mathcal{S})$  for any regular skein  $\mathcal{S}$ . For any integer  $n$ , denote by  $\text{Sk}_n$  the set of regular skeins of complexity less than  $n$ . Let us prove inductively that  $\Psi|_{\text{Sk}_n} = \Phi|_{\text{Sk}_n}$ . Thanks to points 1 and 2, the equality holds for  $n = 0$ . Assume that it is true for  $n \in \mathbb{N}$  and consider a regular skein  $\mathcal{S} \in \text{Sk}_{n+1}$ . Suppose that  $\mathcal{S}$  is based at infinity. According to  $(\diamond)$  and to point 6, for any face  $F \in \mathbb{F}_{\mathcal{S}}$ ,  $\frac{d}{d|F|}\Phi$  and  $\frac{d}{d|F|}\Psi$  are a linear combination of terms of the form  $\Phi(\mathcal{S}')$ ,  $\Psi(\mathcal{S}')$  or  $\Phi(\mathcal{S}^L)\Phi(\mathcal{S}^R)$ ,  $\Psi(\mathcal{S}^L)\Psi(\mathcal{S}^R)$ , with  $\mathcal{C}(\mathcal{S}')$ ,  $\mathcal{C}(\mathcal{S}^L)$ ,  $\mathcal{C}(\mathcal{S}^R) < n$ . Hence, by induction hypothesis,  $\Psi(\mathcal{S}) = \Phi(\mathcal{S})$ . Assume now that  $\mathcal{S}$  is not based at infinity. Let  $(\mathcal{S}^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$  and  $\{r_l, l \in \mathcal{S}\}$  be given as in Lemma 3.4.12. Then, for any  $\varepsilon > 0$ ,  $\mathcal{S}^\varepsilon$  is based at infinity and  $\Psi(\mathcal{S}^\varepsilon) = \Phi(\mathcal{S}^\varepsilon)$ . The points 3 and 4 yield that  $\Psi(\mathcal{S}) = \Phi(\mathcal{S})$ .  $\square$



## Chapitre 4

# Fluctuations macroscopiques et microscopiques, champs maîtres non orientés d'ordre supérieur

Le but de ce chapitre est de généraliser les résultats du chapitre précédent à d'autres séries de groupes. On montre que le champ maître gaussien et le champ maître orienté permettent aussi de décrire le comportement asymptotique de la mesure de Yang-Mills pour les séries de groupes compacts orthogonaux et symplectiques. En outre, les quantités analogues au champ maître orienté sont identiques pour les séries orthogonales et symplectiques. En revanche, contrairement au champ maître gaussien, les champs gaussiens intervenants pour ces deux séries sont non-centrés et les moyennes des champs gaussiens obtenus pour les séries orthogonales et symplectiques sont opposées. Un autre but est de montrer comment appliquer les résultats du chapitre précédent pour montrer simultanément des résultats de fluctuations d'un nombre fini de coefficient de grandes matrices et de traces de polynômes de grandes matrices. Les fluctuations du premier type seront appelées microscopiques tandis que celles du second type seront dites macroscopiques.

### 4.1 Un théorème central limite pour les mouvements browniens orthogonaux et symplectiques

Nous allons tout d'abord considérer un mouvement brownien sur chacun des groupes compacts  $O(N)$  et  $Sp(2N)$ . Rappelons comment l'on définit le mouvement brownien sur ces deux groupes. Pour tout  $X, Y \in M_N(\mathbb{C})$ , on note

$$\langle X, Y \rangle = N \text{Tr}(X^* Y).$$

Cette forme sesquilinéaire induit par restriction un produit scalaire sur les algèbres de Lie de matrices de  $M_N(\mathbb{C})$ . Notons  $(K_t^{\mathfrak{g}})_{t \geq 0}$  le mouvement brownien sur l'espace Euclidien  $(\mathfrak{g}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  pour chaque algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$  de matrices de  $M_N(\mathbb{C})$ . Soit  $G$  un sous-groupe fermé de  $GL_N(\mathbb{C})$  d'algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$ . On appelle mouvement brownien sur  $G$ , le processus  $(G_t)_{t \geq 0}$  solution de l'équation différentielle

$$dG_t = G_t dK_t^{\mathfrak{g}} + \frac{1}{2} \langle\langle dK_t^{\mathfrak{g}}, dK_t^{\mathfrak{g}} \rangle\rangle.$$

Quand  $\mathfrak{g}$  est l'algèbre de Lie  $\mathfrak{o}(N) = \{X \in M_N(\mathbb{R}) : X + {}^tX = 0\}$  ou  $\mathfrak{sp}(2N) = \{M \in M_{2N}(\mathbb{C}) : M + M^* = 0, {}^tMJ + JM = 0\}$ , alors  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathfrak{g}}$  est invariante par conjugaison par  $O(N)$  ou  $\mathrm{Sp}(2N)$ . Rappelons que  $\langle 1 \ 2 \rangle_{\omega}$  est le bitenseur de  $\mathrm{End}(\mathbb{C}^{2N})^{\otimes 2}$ ,  $\sum_{1 \leq a, b, c, d \leq 2N} J_{a, c} J_{b, d} E_{a, b} \otimes E_{c, d}$ . Les bi-

tenseurs de variation quadratique  $\langle\langle dK_t^{\mathfrak{g}} \otimes dK_t^{\mathfrak{g}} \rangle\rangle$  prennent alors la forme spécifique suivante :

$$\langle\langle dK_t^{\mathfrak{o}(N)} \otimes dK_t^{\mathfrak{o}(N)} \rangle\rangle = \frac{1}{N} (-(1 \ 2) + \langle 1 \ 2 \rangle) dt$$

et

$$\langle\langle dK_t^{\mathfrak{sp}(2N)} \otimes dK_t^{\mathfrak{sp}(2N)} \rangle\rangle = \frac{1}{2N} (-(1 \ 2) + \langle 1 \ 2 \rangle_{\omega}) dt.$$

En particulier,

$$\langle\langle dK_t^{\mathfrak{o}(N)}.dK_t^{\mathfrak{o}(N)} \rangle\rangle = (-1 + \frac{1}{N}) \mathrm{Id}_N dt$$

et

$$\langle\langle dK_t^{\mathfrak{sp}(2N)}.dK_t^{\mathfrak{sp}(2N)} \rangle\rangle = (-1 - \frac{1}{2N}) \mathrm{Id}_{2N} dt.$$

On peut dès lors entreprendre de généraliser les résultats de la première section du chapitre précédent. Leur point de départ est l'application de la formule d'Itô à un tenseur en le mouvement brownien. Pour tout  $t \geq 0$ ,

$$\frac{d}{dt} \mathbb{E}[O_t^{\otimes n}] = \mathbb{E}[O_t^{\otimes n}] \left( -\frac{n}{2} (1 - \frac{1}{N}) + \frac{1}{N} \sum_{1 \leq a < b \leq n} \langle a \ b \rangle - (a \ b) \right) \quad (4.1)$$

et

$$\frac{d}{dt} \mathbb{E}[S_t^{\otimes n}] = \mathbb{E}[S_t^{\otimes n}] \left( -\frac{n}{2} (1 + \frac{1}{2N}) + \frac{1}{2N} \sum_{1 \leq a < b \leq n} \langle a \ b \rangle_{\omega} - (a \ b) \right). \quad (4.2)$$

Il s'agit maintenant de comprendre l'action de chacun des opérateurs apparaissant dans les membres de droites. Dans le cas orthogonal, ce sont des images par la représentation standard de l'algèbre de Brauer  $\mathcal{B}_n(N)$ . Pour tout diagramme de Brauer  $b$  et  $M \in M_N(\mathbb{C})$ , notons  $f_b(M) = N^{-\#b} \mathrm{Tr}(bM^{\otimes n})$  et

$$\varphi_{N,t}(b) = \mathbb{E}[f_b(O_t)],$$

où l'on identifie  $b$  dans le membre de droite avec l'endomorphisme<sup>1</sup> de  $\mathrm{End}((\mathbb{C}^N)^{\otimes n})$ . Rappelons la définition des cumulants relatifs  $(k_{\mathcal{V}, \mathcal{W}})_{\mathcal{V} \leq \mathcal{W}}$  introduite page 78 de la section 3.1.2. Pour tout diagramme de Brauer partiel, on introduit

$$\varphi_{N,t}(b, \pi) = N^{2(\#\pi - 1)} k_{\#\pi} (f_{b|B}(O_t), B \in \pi) = N^{2\#\pi - \#b - 2} \mathrm{Tr}(b k_{\pi, 1_n}(O_t^{\otimes n})).$$

On va voir qu'à l'instar du cas unitaire, les fonctions  $(t \mapsto \varphi_{N,t}(b, \pi))_{(b, \pi) \in \mathcal{PB}_n}$  vérifient un système différentiel d'ordre 1 qui converge quand  $N \rightarrow \infty$ .

Dans le cas symplectique, la situation est analogue mais un peu plus compliquée, du fait que l'algèbre contenant les opérateurs du membre de droite est  $\mathcal{B}_n(-2N)$  dont la représentation

---

1. cet endomorphisme est noté  $\rho(b)$  dans la section 1.1.3.

standard dans  $\text{End}((\mathbb{C})^{\otimes n})$  est moins transparente que celle de  $\mathcal{B}_n(N)$ . Pour tout diagramme de Brauer  $b \in \mathcal{B}_n$ , considérons

$$b_\omega = \sum_{i: \mathbb{Z} \times \{-1, 1\} \rightarrow \{1, \dots, 2N\}} \prod_{\substack{x \sim_b y \\ x_2 = y_2, x_1 < y_1}} J_{i_x, i_y} \prod_{\substack{x \sim_b y \\ x_2 = -y_2}} \delta_{i_x, y_y} E_{i_{(1,1)}, i_{(1,-1)}} \otimes \cdots \otimes E_{i_{(n,1)}, i_{(n,-1)}}.$$

L'application linéaire  $b \in \mathcal{B}_n \rightarrow b_\omega \in \text{End}((\mathbb{C}^{2N})^{\otimes n})$  n'est pas un morphisme d'algèbre, ni pour  $\mathcal{B}_n(2N)$  ni pour  $\mathcal{B}_n(-2N)$ . Par exemple,  $\langle 1 \ 2 \rangle_\omega^2 = 2N \langle 1 \ 2 \rangle_\omega$  mais  $\langle 1 \ 2 \rangle_\omega (1 \ 2) = -\langle 1 \ 2 \rangle_\omega \neq \langle 1 \ 2 \rangle_\omega$ .

Pour tout diagramme de Brauer  $b \in \mathcal{B}_n$ , considérons le graphe  $\mathcal{G}_b$  ayant pour sommets  $\{1, \dots, n\} \times \{-1, 1\}$  et pour arêtes  $\{\{x, y\} : x \sim_b y\} \cup \{\{(i, -1), (i, 1)\} : i \in \{1, \dots, n\}\}$ . Le degré de chaque sommet de  $\mathcal{G}_b$  est de 2, chaque composante connexe de  $\mathcal{G}_b$  est donc un cycle non orienté. Une orientation des cycles de  $\mathcal{G}_b$  induit une fonction  $s : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{-1, 1\}$  telle que  $s(i) = 1$  si et seulement si  $((i, 1), (i, -1))$  est parcouru positivement et une permutation  $\sigma_{b,s} \in \mathfrak{S}_n$ . On dit alors que  $s$  est une orientation de  $b$ , que  $(b, s)$  est un diagramme de Brauer orienté et on désigne par  $\mathcal{O}_b$  l'ensemble des orientations de  $b$ . Notons  $\pi_b$  la partition de  $\{1, \dots, n\}$  obtenue en projetant les composantes connexes de  $\mathcal{G}_b$  sur  $\mathbb{Z}$ . On fixe  $s_b \in \mathcal{O}_b$  l'orientation de  $b$  telle que  $s_b(i) = 1$  si  $i$  est un minimum d'un bloc de  $\pi_b$ .

**Lemme 4.1.1.** *Pour tout diagramme de Brauer  $b \in \mathcal{B}_n$ , notons  $\rho(b) \in \text{End}((\mathbb{C}^{2N})^{\otimes n})$  l'unique tenseur valant  $\pm b_\omega$ , tel que*

$$(-1)^n \text{Tr}(\rho(b)) = (-2N)^{\#b}.$$

*L'application  $\rho : \mathcal{B}_n(-2N) \rightarrow \text{End}((\mathbb{C}^{2N})^{\otimes n})$  est un morphisme d'algèbre. En outre, pour toutes matrices  $S_1, \dots, S_n \in \text{Sp}(2N)$  et tout diagramme de Brauer orienté  $(b, s)$ ,*

$$(-1)^n \text{Tr}(\rho(b) S_1 \otimes \cdots \otimes S_n) = (-1)^{\#b} \text{Tr}(\sigma_{(b,s)} S_1^{s(1)} \otimes \cdots \otimes S_n^{s(n)}). \quad (4.3)$$

**Exemple 4.1.2.** *Pour tout  $n \geq 2$ ,  $\rho((1 \ 2)) = -(1 \ 2) \in \text{End}((\mathbb{C}^{2N})^{\otimes n})$  et  $\rho(\langle 1 \ 2 \rangle) = -\langle 1 \ 2 \rangle_\omega$ .*

*Preuve.* Pour toute matrices  $S_1, \dots, S_n \in \text{Sp}(2N)$ , si  $s^{-1}(\{-1\}) = \{i_1, \dots, i_k\}$ ,  $\text{Tr}(b_\omega S_1 \otimes \cdots \otimes S_n) = \pm \text{Tr}(\sigma_\pi S_1 \otimes \cdots \otimes J S_{i_1} J \otimes \cdots \otimes J S_{i_k} J \otimes \cdots) = \pm \text{Tr}(\sigma_{b,s} S_1^{s(1)} \otimes \cdots \otimes S_n^{s(n)})$ . Par définition,  $\rho(b)$  satisfait l'égalité (4.3). Montrons que l'application  $\rho : \mathcal{B}_n(-2N) \rightarrow \text{End}((\mathbb{C}^{2N})^{\otimes n})$  est un morphisme d'algèbre. Notons que l'on a bien  $\rho(\text{Id}) = \text{Id}_{2N}$ . Chaque diagramme de Brauer est un produit d'éléments de la famille  $\mathcal{T} = \{(i \ j), \langle i \ j \rangle, 1 \leq i < j \leq n\}$ . En raisonnant par récurrence sur la longueur des mots en ces éléments, il suffit de montrer que pour tout diagramme de Brauer  $b \in \mathcal{B}_n$  et tout  $x \in \mathcal{T}$ ,  $\rho(x)\rho(b) = \rho(xb)$ . Pour toute paire  $(b, x) \in \mathcal{B}_n \times \mathcal{T}$ ,  $\rho(x)b_\omega = -x_\omega b_\omega = \pm(-2N)^{l(x,b)}(xb)_\omega \in \text{End}((\mathbb{C}^{2N})^{\otimes n})$  et par définition de  $\rho$ , il nous faut montrer que

$$\text{Tr}(\rho(x)\rho(b)) = (-2N)^{\#(bx) + l(x,b) + n} = (-2N)^{\#(bx) + l(x,b) - \#b} \text{Tr}(\rho(b)). \quad (4.4)$$

Notons  $\Delta(x, b)$  l'entier  $\#(bx) + l(x, b) - \#b$  et fixons  $1 \leq i < j \leq n$ , tels que  $x \in \{(i \ j), \langle i \ j \rangle\}$ . Supposons que  $i$  et  $j$  appartiennent à deux composantes connexes distinctes de  $\pi_b$ , on alors  $\Delta(x, b) = -1$ . Si  $A$  désigne la réunion de ces deux composantes connexes et  $B$  leur complémentaire, alors  $\text{Tr}(\rho(x)\rho(b)) = \text{Tr}(\rho(b|_B))\text{Tr}(\rho(x|_A)\rho(b|_A))$  et on peut supposer que  $\pi_b$  n'admet que deux composantes connexes. Notons  $p$  et  $q$  les nombres d'arêtes horizontales parcourues par chacun des cycles de  $\mathcal{G}_b$ . Alors,  $(2N)^2 = (-1)^n \text{Tr}(\rho(b)) = \text{Tr}(J^p)\text{Tr}(J^q)$ ,  $\text{Tr}(x_\omega \rho(b)) = (-1)^n \text{Tr}(J^{p+q}) = (-1)^n 2N$  et  $(-1)^n \text{Tr}(\rho(x)\rho(b)) = -2N$ . Supposons maintenant que  $i \sim_{\pi_b} j$ .

On peut ici considérer que  $\#\pi_b = 1$ . Notons  $p$  et  $q$  les nombres d'arêtes horizontales parcourues par les deux segments du cycle de  $\mathcal{G}_b$  de part et d'autre de  $(i, 1)$  et  $(j, 1)$ . Ces deux entiers sont de même parité, paire, si  $s(i) = s(j)$ , impaire, si  $s(i) = -s(j)$ . Notons  $\varepsilon \in \{-1, 1\}$  tel que  $\varepsilon \text{Tr}(J^{p+q}) = \text{Tr}(\rho(b)) = -2N$ . Si  $s_x(i)s_x(j) = s_b(i)s_b(j)$ , alors  $\Delta(x, b) = 1$ . En outre,  $(-1)^n \text{Tr}(x_\omega \rho(b))$  vaut  $\varepsilon \text{Tr}(J^p) \text{Tr}(J^q) = -(2N)^2$ , si  $s(i)s(j) = 1$  et  $\varepsilon \text{Tr}(J^{p+1}) \text{Tr}(J^{q+1}) = -(2N)^2$ , si  $s(i)s(j) = -1$ . Si  $s_x(i)s_x(j) = -s_b(i)s_b(j)$ , alors  $\Delta(x, b) = 0$  et  $(-1)^n \text{Tr}(x_\omega \rho(b)) = \varepsilon \text{Tr}(J^{p-q}) = -\varepsilon \text{Tr}(J^{p+q}) = 2N$ . Quand  $i \sim_{\pi_b} j$ , le nombre  $\Delta(x, b)$  vaut donc 1 ou 0. Dans les deux cas, on a bien  $\text{Tr}(\rho(x)\rho(b)) = (-2N)^{\Delta(x,b)} \text{Tr}(\rho(b))$ .  $\square$

On remarque en particulier que le membre de droite de (4.3) ne dépend pas de l'orientation  $s \in \mathcal{O}_b$ . En outre, une telle formule est aussi vérifiée dans le cas orthogonal : pour toutes matrices  $O_1, \dots, O_n \in \mathcal{O}(N)$ ,

$$\text{Tr}(b O_1 \otimes \dots \otimes O_n) = \text{Tr}(\sigma_{b,s} O_1^{s(1)} \otimes \dots \otimes O_n^{s(n)}). \quad (4.5)$$

Pour tout diagramme de Brauer  $b$  et  $S \in \text{Sp}(2N)$ , posons

$$f_b^-(S) = (-1)^n (-2N)^{-\#b} \text{Tr}(\rho(b) S^{\otimes n})$$

et

$$\varphi_{-2N,t}(b) = \mathbb{E}[f_b^-(S_t)].$$

Si  $\pi$  est une partition moins fine que  $\pi_b$ , notons

$$\varphi_{-2N,t}(b, \pi) = (-2N)^{2(\#\pi-1)} k_{\#\pi}(f_{b|B}^-(S), B \in \pi) = (-1)^n (-2N)^{2\#\pi-\#b-2} \text{Tr}(\rho(b) k_{\pi,1_n}(S^{\otimes n})).$$

**Exemple 4.1.3.** Si  $\sigma \in \mathfrak{S}_n$  admet  $k$  cycles de longueur respective  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ ,

$$\varphi_{-2N,t}(\sigma, \pi) = (2N)^{2(\#\pi-1)} k_{\#\pi}(\text{tr}(S_t^{\lambda_1}), \dots, \text{tr}(S_t^{\lambda_k})).$$

Par exemple, si  $\sigma \in \mathfrak{S}_n$  admet deux cycles de longueur  $a$  et  $b$  et  $\pi = \pi_\sigma$ , alors  $\varphi_{-2N,t}(\sigma, \pi) = \text{cov}(\text{Tr}(S_t^a), \text{Tr}(S_t^b))$ . Si  $\pi = 1_n$ ,  $\varphi_{-2N,t}(\sigma, \pi) = \mathbb{E}[\prod_{i=1}^k \text{tr}(S_t^{\lambda_i})]$ .

La formule d'Itô (4.2) se reformule

$$\frac{d}{dt} \mathbb{E}[S_t^{\otimes n}] = \mathbb{E}[S_t^{\otimes n}] \rho \left( -\frac{n}{2} \left( 1 - \frac{1}{-2N} \right) + \frac{1}{-2N} \sum_{1 \leq a < b \leq n} \langle a \ b \rangle - (a \ b) \right). \quad (4.6)$$

Reconsidérons maintenant le Lemme 3.1.7 du chapitre précédent. Notons  $\iota : A \in M_N(\mathbb{C}) \mapsto \overline{A} \in M_N(\mathbb{C})$  et pour tout  $s : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{-1, 1\}$ , soit  $\iota_s : A_1 \otimes \dots \otimes A_n \in M_N(\mathbb{C})^{\otimes n} \mapsto \iota^{(s(1)-1)/2}(A_1) \otimes \dots \otimes \iota^{(s(n)-1)/2}(A_n) \in M_N(\mathbb{C})^{\otimes n}$ . Introduisons  $\mathcal{B}_n^s(z)$  le sous-espace vectoriel de  $\mathcal{B}_n(z)$  engendré par les diagrammes  $b \in \mathcal{PB}_n$ , tels que les paires de points  $(a, \varepsilon_a), (b, \varepsilon_b) \in \{1, \dots, n\} \times \{-1, 1\}$  reliés par  $b$  vérifient  $\varepsilon_a \varepsilon_b = -s(a)s(b)$ . Il est facile de vérifier que  $\mathcal{B}_n^s(z)$  est une sous-algèbre de  $\mathcal{B}_n(z)$  isomorphe à une sous-algèbre de Brauer murée. On dénote de même  $\mathcal{PB}^s(z)$  la sous-algèbre de  $\mathcal{PB}_n(z)$  dont la projection sur  $\mathcal{B}_n(z)$  est  $\mathcal{B}_n^s(z)$ . On considère pour tout  $(b, \pi) \in \mathcal{PB}_n^s$ ,

$$\varphi_{N,t,s}(b, \pi) = N^{2(\#\pi-1)-\#b} \text{Tr}(b k_{\pi,1_n}(\iota_s(U_t^{\otimes n}))).$$

De la même façon que pour le Lemme 3.1.7 du chapitre précédent, on montre le résultat suivant. Notons pour tout  $1 \leq i < j \leq n$ ,  $T_{i,j}^{s,\pm}$  (ou simplement  $T_{i,j}^\pm$  quand  $s = 1$ ) l'élément de  $\mathcal{B}_n$  valant  $(i\ j)$ , si  $s(i) = \pm s(j)$  et  $-\langle i\ j \rangle$ , si  $s(i) = \mp s(j)$ . En outre, on pose  $\overline{T}_{i,j}^\pm = (T_{i,j}^\pm, 1_{\{i,j\}})$ . Avec ces notations,  $T_{i,j}^\varepsilon \in \mathcal{PB}_n^s$  si et seulement si  $s(i)s(j) = \varepsilon$ . On considère dans le lemme suivant les fonctions non-normalisées  $\tilde{\varphi}_{z,t}$  (resp.  $\tilde{\varphi}_{N,s,t}$ ) que l'on définit en posant pour  $(b, \pi) \in \mathcal{PB}_n$  et  $z \in \{N, -2N\}$ ,

$$\tilde{\varphi}_{z,t}(b, \pi) = z^{-2(\#\pi-1)+\#b} \varphi_{z,t}(b, \pi)$$

et pour  $(b, \pi) \in \mathcal{PB}_n^s$ ,

$$\tilde{\varphi}_{N,s,t}(b, \pi) = N^{-2(\#\pi-1)+\#b} \varphi_{N,s,t}(b, \pi).$$

**Lemme 4.1.4.** *i) Pour toute paire de partitions  $\mathcal{V}, \mathcal{W} \in \mathcal{P}_n$ , avec  $\mathcal{V} \leq \mathcal{W}$ ,*

$$e^{\frac{(N-1)nt}{2N}} k_{\mathcal{V}, \mathcal{W}}(O_t^{\otimes n}) = \sum_{k \geq 0} \frac{(-t)^k}{k!} \sum_{\substack{i_1 < j_1, \dots, i_k < j_k, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k \in \{-1, 1\} \\ \mathcal{V} \vee 1_{\{i_1, j_1\}} \vee \dots \vee 1_{\{i_k, j_k\}} = \mathcal{W}}} T_{i_1, j_1}^{\varepsilon_1} \cdots T_{i_k, j_k}^{\varepsilon_k}$$

et

$$e^{\frac{(2N+1)nt}{4N}} k_{\mathcal{V}, \mathcal{W}}(S_t^{\otimes n}) = \sum_{k \geq 0} \frac{(-t)^k}{k!} \sum_{\substack{i_1 < j_1, \dots, i_k < j_k, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k \in \{-1, 1\} \\ \mathcal{V} \vee 1_{\{i_1, j_1\}} \vee \dots \vee 1_{\{i_k, j_k\}} = \mathcal{W}}} \rho \left( T_{i_1, j_1}^{\varepsilon_1} \cdots T_{i_k, j_k}^{\varepsilon_k} \right).$$

Pour tout  $\varepsilon : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{-1, 1\}$ ,

$$e^{\frac{nt}{2}} k_{\mathcal{V}, \mathcal{W}}(\iota_\varepsilon(U_t^{\otimes n})) = \sum_{k \geq 0} \frac{(-t)^k}{k!} \sum_{\substack{i_1 < j_1, \dots, i_k < j_k \\ \mathcal{V} \vee 1_{\{i_1, j_1\}} \vee \dots \vee 1_{\{i_k, j_k\}} = \mathcal{W}}} T_{i_1, j_1}^{\varepsilon, +} \cdots T_{i_k, j_k}^{\varepsilon, +}.$$

ii) Pour tout diagramme de Brauer partiel  $(b, \pi) \in \mathcal{PB}_n$  et  $z \in \{-2N, N\}$

$$\frac{d}{dt} \varphi_{z,t}(b, \pi) = -\tilde{\varphi}_{z,t} \left( (b, \pi) \left( \frac{n}{2} \left( 1 - \frac{1}{z} \right) + \frac{1}{z} \sum_{1 \leq i < j \leq n, \varepsilon \in \{-1, 1\}} \overline{T}_{i,j}^\varepsilon \right) \right), \quad (4.7)$$

le produit du membre de droite étant effectué dans l'algèbre  $\mathcal{PB}_n(z)$ . Pour diagramme de Brauer partiel orienté  $(b, \pi)$  et  $s \in \mathcal{O}_b$ ,

$$\frac{d}{dt} \varphi_{N,t,s}(b, \pi) = -\tilde{\varphi}_{N,t,s} \left( (b, \pi) \left( \frac{n}{2} + \frac{1}{N} \sum_{1 \leq i < j \leq n} \overline{T}_{i,j}^{s,+} \right) \right), \quad (4.8)$$

Pour chaque paire  $((b, \pi), x)$  formée d'un diagramme de Brauer partiel et d'une transposition ou d'une contraction de Weil agissant non trivialement sur la paire d'entier  $(i, j)$ , notons

$$\Delta((b, \pi), \bar{x}) = \#b \circ x - \#b + l(x, b) + 2(\#\pi - \#\pi \vee 1_{\{i,j\}}).$$

L'équation (4.7) se reformule



$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\varphi_{z,t}(b, \pi) = & -\frac{n}{2}\left(1 - \frac{1}{z}\right)\varphi_{z,t}(b, \pi) - \sum_{1 \leq i < j \leq n, \varepsilon \in \{-1, 1\}} z^{\Delta((b, \pi), \overline{(i, j)})-1} \varphi_{z,t}(b \circ (i, j), \pi \vee 1_{\{i, j\}}) \\
& + \sum_{1 \leq i < j \leq n, \varepsilon \in \{-1, 1\}} z^{\Delta((b, \pi), \overline{(i, j)})-1} \varphi_{z,t}(b \circ \langle i, j \rangle, \pi \vee 1_{\{i, j\}}).
\end{aligned} \tag{4.7'}$$

De même que  $\Delta(b, x)$ ,  $\Delta((b, \pi), \bar{x})$  est à valeur dans  $\{1, 0, -1\}$ . Distinguons les trois cas correspondant à chacune de ses valeurs. Si  $i \sim_{\pi_b} j$  et  $s_b(i)s_b(j) = s_x(i)s_x(j)$ , alors  $\sigma_{bx}$  vaut  $\sigma_b(i, j)$ , si  $s_b(i) = s_b(j)$ ,  $\sigma_b(\sigma_b^{-1}(i), j)$ , si  $s_b(i) = -s_b(j)$  et  $\sigma_b(j) \neq i$  et  $\sigma_b$  si  $\sigma_b(j) = i$  et alors  $l(b, x) = 1$  (tandis que dans les deux cas précédents  $l(b, x) = 0$ ). On en déduit que si  $i \sim_b j$ , alors la multiplication par  $x$  sépare un cycle de  $\sigma_b$  en deux cycles ou crée une boucle et  $\Delta(b, x) = \Delta((b, \pi), \bar{x}) = 1$ . En revanche, si  $i \not\sim_{\pi_b} j$  alors  $\sigma_{bx}$  admet un cycle de moins que  $\sigma_b$  donc  $\Delta(x, b) = -1$ , tandis que  $\Delta((b, \pi), \bar{x})$  vaut 1, si  $i \not\sim_{\pi} j$  et  $-1$ , si  $i \sim_{\pi} j$ . Considérons maintenant la dernière possibilité où  $i \sim_{\pi_b} j$  avec  $s_b(i)s_b(j) = -s_x(i)s_x(j)$ . Alors  $\#\sigma_{bx} = \#\sigma_b$  et  $\Delta(b, x) = \Delta((b, \pi), \bar{x}) = 0$ .

Reformulons l'expression (4.7) à l'aide d'opérateurs indépendants de  $N$ , sur les fonctions de  $\mathcal{PB}_n$ . Pour toute fonction  $\phi$  et  $(b, \pi) \in \mathcal{PB}_n$ , posons

$$L(\phi)(b, \pi) = -\frac{n}{2}\phi(b, \pi) + \sum \phi(b \circ T_{i,j}^{\varepsilon}, \pi \vee 1_{\{i, j\}}),$$

où la somme porte sur les paires d'entiers  $i < j$  et  $\varepsilon \in \{-1, 1\}$  telles que  $i$  et  $j$  sont dans deux blocs distincts de  $\pi$  ou dans le même bloc de  $\pi_b$  avec  $\varepsilon = s_b(i)s_b(j)$ ,

$$C(\phi)(b, \pi) = \frac{n}{2}\phi(b, \pi) - \sum_{\substack{i < j, \varepsilon \in \{-1, 1\} \\ i \sim_{\pi_b} j}} \phi(b \circ T_{i,j}^{s_b, -}, \pi \vee 1_{\{i, j\}})$$

et

$$D(\phi)(b, \pi) = - \sum_{\substack{i < j, \varepsilon \in \{-1, 1\} \\ i \not\sim_{\pi_b} j, i \sim_{\pi} j}} \phi(b \circ T_{i,j}^{\varepsilon}, \pi \vee 1_{\{i, j\}}).$$

Les trois sommes apparaissant dans les trois formules ci-dessus correspondent chacune à des valeurs prises par  $\Delta(b, T_{i,j}^{\varepsilon})$  et (4.7') se réécrit

$$\frac{d}{dt}\varphi_{z,t} = \left(L + \frac{1}{z}C + \frac{1}{z^2}D\right)(\varphi_{z,t}). \tag{4.9}$$

En outre, il s'ensuit de la définition de  $\varphi_{z,t}$  que  $\varphi_{z,0}(b, \pi) = 1$ , si  $\pi = 1_n$  et 0 sinon. Rappelons que pour tout  $(b, \pi) \in \mathcal{PB}_n$  et  $\mathcal{V} \in \mathcal{P}_n$ ,  $\mathbf{1}_{\mathcal{V}}(b, \pi) = \delta_{\pi, \mathcal{V}}$ . On a résolu ci-dessus le problème des cumulants pour les mouvements brownien orthogonaux et symplectiques et obtenu la proposition suivante.

**Proposition 4.1.5.** *Pour tout  $t \geq 0$ ,  $z \in \{N, -2N\}$  et  $(b, \pi) \in \mathcal{PB}_n$ ,*

$$\varphi_{z,t}(b, \pi) = \exp\left(t(L + z^{-1}C + z^{-2}D)\right)(\mathbf{1}_{1_n})(b, \pi).$$

On note désormais pour tout nombre complexe  $z \in \mathbb{C}$ ,  $\varphi_{z,t} = \exp(t(L + z^{-1}C + z^{-2}D))(\mathbf{1}_{1_n})$ . Pour tout  $t \geq 0$  et  $(b, \pi) \in \mathcal{PB}_n$ , la fonction  $z \in \mathbb{C} \mapsto \varphi_{t,z}(b, \pi)$  est holomorphe sur  $\mathbb{C}^*$ , avec une singularité essentielle en 0. Pour tout  $s : \{1, \dots, n\}$ ,  $\phi \in \mathcal{PB}_n^{s*}$  et  $(b, \pi) \in \mathcal{PB}_n^s$ , posons

$$L_s(\phi)(b, \pi) = -\frac{n}{2}\phi(b, \pi) - \sum_{i \not\sim_{\pi} j \text{ ou } i \sim_{\pi_b} j} \phi(b \circ T_{i,j}^{s,+}, \pi \vee 1_{\{i,j\}})$$

et

$$D_s(\phi)(b, \pi) = - \sum_{i \sim_{\pi} j \text{ et } i \not\sim_{\pi_b} j} \phi(b \circ T_{i,j}^{s,+}, \pi \vee 1_{\{i,j\}}).$$

Pour tout  $(b, \pi) \in \mathcal{PB}_n$  et  $s$  une orientation de  $b$ ,

$$\varphi_{N,t,s}(b, \pi) = \exp(t(L_s + \frac{1}{N^2}D_s))(\mathbf{1}_{1_n})(b, \pi).$$

On remarque que les opérateurs  $L$  et  $L_1$  stabilisent l'espace vectoriel engendré par  $\{(\sigma, 1_n) : \sigma \in \mathfrak{S}_n\}$  et coïncident sur cet espace. Il s'ensuit que pour toute permutation  $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ ,

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} \varphi_{z,t}(\sigma) = e^{tL}(\sigma, 1_n) = e^{tL_1}(\mathbf{1}_{1_n})(\sigma, 1_n) = \lim_{N \rightarrow \infty} \varphi_{N,t,1}(\sigma, 1_n).$$

Désignons cette limite par  $\varphi_t(\sigma)$ . Il existe une constante  $C > 0$  telle que pour tout  $N \geq 1$  et  $z \in \{-2N, N\}$ ,

$$\max\{|\varphi_{z,t}(\sigma, 1_n) - \varphi_t(\sigma)|, |\varphi_{N,1,t}(\sigma, 1_n) - \varphi_t(\sigma)|, |\varphi_{z,t}(\sigma \times \sigma, \pi_{\sigma \times \sigma})|, |\varphi_{N,1,t}(\sigma \times \sigma, \pi_{\sigma \times \sigma})|\} \leq \frac{C}{N}.$$

On en déduit que la mesure empirique des valeurs propres des mouvements browniens sur les trois groupes  $O(N)$ ,  $Sp(2N)$  et  $U(N)$  convergent faiblement en probabilité vers la même mesure  $\mu_t$ , quand  $N \rightarrow \infty$ .

**Corollaire 4.1.6** ([35]). *Pour tout  $n \geq 0$ , les variables aléatoires  $\text{tr}(O_t^n)$  et  $\text{tr}(S_t^n)$  convergent en probabilité vers la constante  $\mu_{t,n}$ .*

En revanche, les fluctuations de ces suites sont distinctes pour les trois séries de groupes. De la proposition 4.1.5, on déduit le corollaire suivant. Pour toute famille d'entiers relatifs  $\lambda_1, \dots, \lambda_l \in \mathbb{Z}$ , et  $t \geq 0$  fixé, notons

$$k_{t,O}^N(\lambda_1, \dots, \lambda_l) = N^{2(l-1)} k_l(\text{tr}(O_t^{\lambda_1}), \dots, \text{tr}(O_t^{\lambda_l}))$$

$$k_{t,S}^N(\lambda_1, \dots, \lambda_l) = (2N)^{2(l-1)} k_l(\text{tr}(S_t^{\lambda_1}), \dots, \text{tr}(S_t^{\lambda_l}))$$

et

$$k_{t,U}^N(\lambda_1, \dots, \lambda_l) = N^{2(l-1)} k_l(\text{tr}(U_t^{\lambda_1}), \dots, \text{tr}(U_t^{\lambda_l})).$$

Remarquons que les deux premières quantités sont indépendantes du signe de  $\lambda_1, \dots, \lambda_l$ .

**Théorème 4.1.7.** *Pour tout  $t \geq 0$  fixé, les trois suites de cumulants  $k_{t,O}^N, k_{t,S}^N$  et  $k_{t,U}^N$  convergent quand  $N \rightarrow \infty$ . Les deux premières convergent vers la même limite  $k_t$ , notons  $k_t^+$  la troisième limite. Pour tout  $t \geq 0$ ,  $\lambda_1, \dots, \lambda_l \in \mathbb{Z}$ ,*

$$k_t(\lambda_1, \dots, \lambda_l) = \sum_{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{l-1} \in \{-1, 1\}} k_t^+(\varepsilon_1 \lambda_1, \dots, \varepsilon_{l-1} \lambda_{l-1}, \lambda_l).$$

**Exemple 4.1.8.** *Pour tout  $n, m \in \mathbb{N}$ , on a en particulier*

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} \text{cov}(\text{Tr}(O_t^n), \text{Tr}(O_t^m)) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \text{cov}(\text{Tr}(S_t^n), \text{Tr}(S_t^m)) \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \text{cov}(\text{Tr}(U_t^n), \text{Tr}(U_t^m)) + \text{cov}(\text{Tr}(U_t^n), \text{Tr}(U_t^{-m})). \end{aligned}$$

*En revanche ces inégalités ne sont pas vérifiées pour tout  $N$ . Pour  $n, m = 1$ , en appliquant les formules (4.1) et (4.2), on trouve que*

$$e^{t(1-N^{-1})} \text{cov}(\text{Tr}(O_t), \text{Tr}(O_t)) = e^t - 1 - t + (1 - \frac{2}{N}) \frac{t^2}{2} + O(\frac{1}{N^2})$$

*et*

$$e^{t(1+(2N)^{-1})} \text{cov}(\text{Tr}(S_t), \text{Tr}(S_t)) = e^t - 1 - t + (1 + \frac{1}{N}) \frac{t^2}{2} + O(\frac{1}{N^2}),$$

*tandis qu'en appliquant le Lemme 3.1.4 du chapitre précédent, on obtient,*

$$e^t \text{cov}(\text{Tr}(U_t, U_t)) + e^t \text{cov}(\text{Tr}(U_t, \overline{U}_t)) = e^t - t - 1 + \frac{t^2}{2} + O(\frac{1}{N^2}).$$

*Preuve.* Pour tout  $\lambda \in \mathbb{Z}^l$ , notons  $\sigma_\lambda$  la permutation  $(1 \cdots |\lambda_1|) \times \cdots \times (1 \cdots |\lambda_l|)$ ,  $n = \sum_{k=1}^l |\lambda_k|$  et  $s : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{-1, 1\}$  tel que si  $i$  appartient au  $k$ ième cycle de  $\sigma_\lambda$  alors  $\lambda_k = s(i)|\lambda_k|$ . On a alors  $k_{t,O}^N(\lambda) = \varphi_{N,t}(\sigma_\lambda, \pi_{\sigma_\lambda})$ ,  $k_{t,S}^N(\lambda) = \varphi_{-2N,t}(\sigma_\lambda, \pi_{\sigma_\lambda})$  et  $k_{t,U}^N(\lambda) = \varphi_{N,t,s}(\sigma_\lambda, \pi_{\sigma_\lambda})$ . Les deux premières suites ont pour limite  $\varphi_t(\sigma_\lambda, \pi_{\sigma_\lambda})$  et la troisième tend vers  $\varphi_{t,s}(\sigma_\lambda, \pi_{\sigma_\lambda})$ . Notons  $\mathcal{PB}_n^\lambda$ , l'ensemble des diagrammes de Brauer partiels  $(b, \pi)$  tels que  $\pi \geq \pi_{\sigma_\lambda}$  et la fonction  $s_b : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{-1, 1\}$  est constante sur les orbites de  $\sigma_\lambda$ . Pour tout  $(b, \pi) \in \mathcal{PB}_n^\lambda$ , notons  $\mathcal{O}_{b,\pi}$  l'ensemble des orientations  $s$  de  $b$  telles que  $s|_B = \pm s_b|_B$  pour tout bloc  $B \in \pi$ . Posons alors pour tout  $(b, \pi) \in \mathcal{PB}_n^\lambda$ ,

$$\psi_t(b, \pi) = \sum_{s \in \mathcal{O}_{b,\pi}, s(1)=1} \varphi_{t,s}(b, \pi).$$

Pour montrer la deuxième partie du Théorème, il suffit de montrer que  $\psi_t(\sigma_\lambda, \pi_{\sigma_\lambda}) = \varphi_t(\sigma_\lambda, \pi_{\sigma_\lambda})$ . Pour tout  $(b, \pi) \in \mathcal{PB}_n^\lambda$ ,  $\psi_0(b, \pi) = \varphi_0(b, \pi) = 1$ , si  $\pi = 1_n$  et 0 sinon. Montrons que ces deux fonctions sont solutions de la même équation différentielle. Notons  $\circ$  l'opération de multiplication dans  $\mathcal{PB}_n(1)$ . Pour tout  $(b, \pi) \in \mathcal{PB}_n^\lambda$  et  $s \in \mathcal{O}_b$ , alors pour toute paire  $i < j$ ,  $(b, \pi) \overline{T}_{i,j}^{s,+} \in \mathcal{PB}_n^s \subset \mathcal{PB}_n^\lambda$  et si  $i \not\sim_\pi j$  alors  $(b, \pi) \overline{T}_{i,j}^{s,\pm} \in \mathcal{PB}_n^\lambda$ . En outre, pour tout  $t \geq 0$ ,

$$\begin{aligned} \dot{\psi}_t(b, \pi) &= \sum_{s \in \mathcal{O}_{b,\pi}, s(1)=1} L_s(\varphi_{t,s})(b, \pi) \\ &= -\frac{n}{2} \psi_t(b, \pi) - \sum_{\substack{1 \leq i < j \leq n \\ i \sim_{\pi_b} j \text{ ou } i \not\sim_\pi j}} \sum_{s \in \mathcal{O}_{b,\pi}, s(1)=1} \varphi_{t,s}((b, \pi) \circ \overline{T}_{i,j}^{s,+}). \end{aligned} \quad (*)$$

Pour chaque paire d'entiers  $(i, j)$  de  $\{1, \dots, n\}$ , si  $i \not\sim_{\pi} j$ , alors  $\{s \in \mathcal{O}_{b,\pi} : s(i)s(j) = s_b(i)s_b(j)\} = \mathcal{O}_{b \circ T_{i,j}^{s_b,+}, \pi \vee \pi_{(i,j)}}$  et

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{s \in \mathcal{O}_{b,\pi}, s(1)=1 \\ s(i)s(j)=s_b(i)s_b(j)}} \varphi_{t,s}((b, \pi) \circ \overline{T}_{i,j}^{s,+}) &= \sum_{\substack{s \in \mathcal{O}_{b \circ T_{i,j}^{s_b,+}, \pi \vee 1_{\{i,j\}}} \\ s(1)=1}} \varphi_{t,s}((b, \pi) \circ \overline{T}_{i,j}^{s_b(i)s_b(j)}) \\ &= \psi_t((b, \pi) \circ \overline{T}_{i,j}^{s_b(i)s_b(j)}). \end{aligned}$$

tandis que  $\{s \in \mathcal{O}_{b,\pi} : s(i)s(j) = -s_b(i)s_b(j)\} = \mathcal{O}_{b \circ T_{i,j}^{s_b,-}, \pi \vee \pi_{(i,j)}}$  et

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{s \in \mathcal{O}_{b,\pi}, s(1)=1 \\ s(i)s(j)=-s_b(i)s_b(j)}} \varphi_{t,s}((b, \pi) \circ \overline{T}_{i,j}^{s,+}) &= \sum_{\substack{s \in \mathcal{O}_{b \circ T_{i,j}^{-s_b(i)s_b(j)}, \pi \vee 1_{\{i,j\}}} \\ s(1)=1}} \varphi_{t,s}((b, \pi) \circ \overline{T}_{i,j}^{-s_b(i)s_b(j)}) \\ &= \psi_t((b, \pi) \circ \overline{T}_{i,j}^{-s_b(i)s_b(j)}). \end{aligned}$$

Supposons maintenant  $i \sim_{\pi_b} j$ , alors  $\mathcal{O}_{(b,\pi) \circ \overline{T}_{i,j}^{s_b,+}} = \mathcal{O}_{b,\pi}$  et

$$\sum_{s \in \mathcal{O}_{b,\pi}, s(1)=1} \varphi_{t,s}((b, \pi) \circ \overline{T}_{i,j}^{s,+}) = \psi_t((b, \pi) \circ \overline{T}_{i,j}^{s_b(i)s_b(j)}).$$

L'équation (\*) se reformule donc comme

$$\begin{aligned} \dot{\psi}_t(b, \pi) &= -\frac{n}{2} \psi_t(b, \pi) - \sum_{i \sim_{\pi_b} j} \psi_t((b, \pi) \circ \overline{T}_{i,j}^{s_b(i)s_b(j)}) - \sum_{i \not\sim_{\pi_b} j, \varepsilon \in \{-1,1\}} \psi_t((b, \pi) \circ \overline{T}_{i,j}^{\varepsilon}) \\ &= L(\psi_t)(b, \pi). \end{aligned}$$

□

Pour tout  $n \geq 1$ , notons  $\mathbf{m}_{t,n}$  le résidu en 0 de la fonction méromorphe  $z \mapsto \varphi_{z,t}((1 \cdots n))$ . On déduit du Théorème 4.1.7 la proposition suivante.

**Proposition 4.1.9.** *Les vecteurs aléatoires  $(\text{Tr}(O_t^n) - N\mu_{t,n})_{n \geq 1}$  et  $(\text{Tr}(S_t^n) - 2N\mu_{t,n})_{n \geq 1}$  convergent en loi vers des vecteurs gaussiens de moyenne respective  $(\mathbf{m}_{t,n})_{n \geq 1}$  et  $(-\mathbf{m}_{t,n})_{n \geq 1}$  et de même matrice de covariance  $(k_{2,t}(p, q))_{p, q \geq 1}$ .*

*Preuve.* Il découle du Théorème 4.1.7 que  $(\text{Tr}(O_t^n) - \mathbb{E}[\text{Tr}(O_t^n)])_{n \geq 1}$  et  $(\text{Tr}(S_t^n) - \mathbb{E}[\text{Tr}(S_t^n)])_{n \geq 1}$  convergent vers des vecteurs gaussiens de même matrice de covariance  $(k_{2,t}(p, q))_{p, q \geq 1}$ . En outre,  $\mathbb{E}[\text{Tr}(O_t^n)] - N\mu_{t,n} = N\varphi_{N,t}((1 \cdots n), 1_n) - N[z^0](\varphi_{z,t}((1 \cdots n), 1_n)) = [z^{-1}](\varphi_{z,t}((1 \cdots n), 1_n)) + O(\frac{1}{N}) = \mathbf{m}_{t,n} + O(\frac{1}{N})$  tandis que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\text{Tr}(S_t^n)] - 2N\mu_{t,n} &= 2N\varphi_{-2N,t}((1 \cdots n), 1_n) - 2N[z^0](\varphi_{z,t}((1 \cdots n), 1_n)) \\ &= -[z^{-1}](\varphi_{z,t}((1 \cdots n), 1_n)) + O(\frac{1}{N}) = -\mathbf{m}_{t,n} + O(\frac{1}{N}). \end{aligned}$$

□

D'après le Théorème 4.1.7, pour tout  $n, m \geq 1$ ,  $k_2(-n, m) = k_2(-n, m) + k_2(n, m)$ . Rappelons que  $L_t(x) = \sum_{n \geq 1} \mu_{t,n} e^{\frac{nt}{2}} x^n$  et que l'on a obtenu au Théorème 3.1.14 l'expression de  $G_t^-(x, y) = \sum_{n, m \geq 1} k_t^+(-n, m) e^{\frac{n+m}{2} t \frac{x^n y^m}{nm}}$  et de  $G_t^+(x, y) = \sum_{n, m \geq 1} k_t^+(n, m) e^{\frac{n+m}{2} t \frac{x^n y^m}{nm}}$ . Pour caractériser les fluctuations des mesures empiriques considérées, il nous reste à déterminer les moyennes  $\mathbf{m}_{t,n}$  pour  $n \in \mathbb{N}^*$ .

**Lemme 4.1.10.** *Pour tout  $n \geq 1$ , soit  $\bar{\mathbf{m}}_{t,n} = e^{\frac{nt}{2}} \mathbf{m}_{t,n}$  et  $\bar{\mu}_{t,n} = e^{\frac{nt}{2}} \mu_{t,n}$ . Alors*

$$\dot{\bar{\mathbf{m}}}_{t,n} = -n \sum_{k=1}^{n-1} \bar{\mathbf{m}}_{t,k} \bar{\mu}_{t,n-k} + n \sum_{1 \leq 2k \leq n-1} \bar{\mu}_{t,n-2k} e^{tk} + \frac{n}{2} (\bar{\mu}_{t,n} + e^{\frac{nt}{2}} \mathbf{1}_{n \text{ even}}).$$

*Preuve.* Posons

$$\bar{m}_t(b) = e^{\frac{nt}{2}} \int_{\mathbb{U}} \exp(t(L + z^{-1}C + z^{-2}D))(\mathbf{1}_{1_n})(b, 1_n) dz$$

et

$$\bar{\mu}_t(b) = \exp(t(L + \frac{n}{2}))(\mathbf{1}_{1_n})(b, 1_n).$$

Alors  $\bar{\mathbf{m}}_{t,n} = \bar{m}_t((1 \cdots n))$  et  $\bar{\mu}_{t,n} = \bar{\mu}_t((1 \cdots n))$ , tandis que pour tout  $b \in \mathcal{B}_n$ ,

$$\begin{aligned} \dot{\bar{m}}_t(b) &= \int_{\mathbb{U}} (L + \frac{n}{2} + z^{-1}C + z^{-2}D) \exp(t(L + \frac{n}{2} + z^{-1}C + z^{-2}D))(\mathbf{1}_{1_n})(b, 1_n) dz \\ &= (L + \frac{n}{2}) \int_{\mathbb{U}} \exp(t(L + \frac{n}{2} + z^{-1}C + z^{-2}D))(\mathbf{1}_{1_n})(b, 1_n) dz + C \exp(t(L + \frac{n}{2}))(\mathbf{1}_{1_n})(b, 1_n) \\ &= (L + \frac{n}{2}) \bar{m}_t(b) + C \bar{\mu}_t(b). \end{aligned} \quad (*)$$

Comme  $m_0 = 0$ , pour tout  $t \geq 0$ ,

$$\bar{m}_t = \int_0^t \exp((t-s)(L + \frac{n}{2})) C \exp(s(L + \frac{n}{2})) ds (\mathbf{1}_{1_n}). \quad (4.10)$$

Pour toute paire d'entiers  $p, q \in \mathbb{N}^*$ , telles que  $p + q = n$ , soit  $\gamma_{p,q} = (1 \cdots p) \times (1 \cdots q)$ , alors en décomposant l'action de  $C$  sur  $\mathcal{PB}_n^*$  et en utilisant (4.10), on obtient que

$$\bar{m}_t(\gamma_{p,q}) = \bar{m}_t((1 \cdots p)) \bar{\mu}_t((1 \cdots q)) + \bar{m}_t((1 \cdots q)) \bar{\mu}_t((1 \cdots p)).$$

Par ailleurs, l'expression de  $\exp(t(L + z^{-1}C + z^{-2}D))(\mathbf{1}_{1_n})(b, 1_n)$  en terme de mouvement brownien pour  $z \in \{-2N, N\}$  permet de montrer que

$$C \bar{m}_t((1 \cdots n)) = \frac{n}{2} \sum_{0 \leq k \leq n-1} \bar{\mu}_{t,|n-2k|} e^{\frac{n-|n-2k|}{2} t} = n \sum_{1 \leq 2k \leq n-1} \bar{\mu}_{t,n-2k} e^{kt} + \frac{n}{2} (\bar{\mu}_{t,n} + e^{\frac{nt}{2}} \mathbf{1}_{n \text{ even}}).$$

L'équation (\*) combinée avec ces deux dernières formules montre le Lemme 4.1.10.  $\square$

Posons

$$M_t(x) = \sum_{n \geq 1} e^{\frac{nt}{2}} \mathbf{m}_{t,n} x^n.$$

Le lemme suivant donne une expression pour la moyenne  $\mathbf{m}_{t,n}$  qui permet bien de retrouver, quand  $t \rightarrow \infty$ , l'expression donnée par les Théorèmes 4 et 6 de [19] pour la moyenne des fluctuations de la mesure empirique des valeurs propres d'une matrice de Haar orthogonale ou symplectique.

**Lemme 4.1.11.** i) Pour tout  $t \geq 0$ ,

$$M_t(x) = \frac{e^t x^2}{1 - e^t x^2} - \frac{2Q(L_t(x)) + tL_t(x)(L_t(x) + 1)}{2(1 + tL_t(x)(L_t(x) + 1))},$$

où  $Q(x) = \frac{1+x^2-x^3}{(1+x)(1+2x)}$ . ii) Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\mathbf{m}_{t,n} \rightarrow \mathbf{1}_n$  even, as  $t \rightarrow \infty$ .

*Preuve.* i) D'après le Lemme 4.1.10,

$$\dot{M}_t(x) = -x\partial_x(L_t(x)M_t(x)) + x\partial_x\left(L_t(x)\frac{e^t x^2}{1 - e^t x^2}\right) + \frac{x}{2}\partial_x\left(L_t(x) + \frac{e^t x^2}{1 - e^t x^2}\right).$$

Soit  $H_t(x) = M_t(x) - \frac{e^t x^2}{1 - e^t x^2} - \frac{1}{2}$ ,

$$\dot{H}_t(x) = -x\partial_x(L_t(x)H_t(x)).$$

Pour conclure, considérons  $F_t(x) = H_t \circ f_t(x)$ . Rappelons que  $f_t(x) = \frac{x}{x+1}e^{tx}$ , il s'ensuit que

$$\begin{aligned}\dot{F}_t(x) &= -f_t(x)\partial_x(L_t(f_t(x)))H_t(f_t(x)) \\ &= -\frac{f_t(x)}{\partial_x(f_t(x))}F_t(x) = -\frac{x(x+1)}{1+tx(x+1)}F_t(x)\end{aligned}$$

et

$$F_t(x) = \frac{F_0(x)}{1+tx(x+1)} = -\frac{1+2Q(x)}{2(1+tx(x+1))},$$

avec  $Q(x) = \frac{1+x^2-x^3}{(1+x)(1+2x)}$ . En déroulant le jeu de définitions menant à  $F_t$ , on trouve que

$$\begin{aligned}M_t(x) &= \frac{e^t x^2}{1 - e^t x^2} - \frac{1+2Q(L_t(x))}{2(1+tL_t(x)(L_t(x)+1))} + \frac{1}{2} \\ &= \frac{e^t x^2}{1 - e^t x^2} - \frac{2Q(L_t(x)) + tL_t(x)(L_t(x)+1)}{2(1+tL_t(x)(L_t(x)+1))}\end{aligned}$$

ii) Les moyennes recherchées sont données par  $\mathbf{m}_{t,n} = [x^n]M_t(e^{-\frac{t}{2}}x)$ . Quand  $t \rightarrow \infty$ ,  $L_t(e^{-\frac{t}{2}}x) \rightarrow 0$ , et  $M_t(e^{-\frac{t}{2}}x) \rightarrow \frac{x^2}{1-x^2}$ .  $\square$

## 4.2 Champs maîtres d'ordre supérieur non orientés

On est maintenant en mesure de généraliser les résultats de la deuxième partie du chapitre précédent. À chaque écheveau de lacets de longueur finie, on associe une quantité invariante sous l'action des difféomorphismes du plan qui conservent l'aire. Cette quantité est définie à l'aide de la mesure de Yang-Mills pour les groupes orthogonaux et symplectiques et ne dépend pas de ce choix de groupes. Par contre, ces quantités diffèrent de celles définies avec la série des groupes unitaires dès que les écheveaux contiennent plus de deux boucles. On peut également définir deux champs gaussiens associés à ces deux séries de groupes. De même que pour les traces d'un seul mouvement brownien, ils ont la même fonction de covariance et des espérances opposées.

### 4.2.1 Mots finis en des mouvements browniens

On montre ici comment généraliser les résultats de la section précédente pour étudier les traces de mots en des mouvements browniens indépendants. On note  $W_q$  l'ensemble des mots en les lettres  $x_1, x_1^{-1}, x_2, x_2^{-1}, \dots, x_q, x_q^{-1}$ . Deux mots sont dits équivalents si l'on peut obtenir l'un à partir de l'autre en effaçant ou en ajoutant des mots à deux lettres de la forme  $x_i^\pm x_i^\mp$ . Chaque classe d'équivalence d'un mot  $w \in W_q$  admet un unique élément de longueur minimale qu'on appelle réduction de  $w$  et que l'on le note  $R(w)$ . Les mots obtenus par réduction sont dits réduits. Pour tout mot  $w \in W_q$ , de longueur  $n$ , notons  $s_w : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{-1, 1\}$ ,  $x_{i_1}^{s_w(1)} \dots x_{i_n}^{s_w(n)}$ . Pour tout diagramme de Brauer  $b$ , on définit  $\theta_w(b)$  comme étant le diagramme de Brauer image de  $b$  par l'application de  $\mathbb{Z} \times \{-1, 1\}$  qui envoie  $(i, \varepsilon)$  sur  $(i, s_w(i)\varepsilon)$  pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$ . En particulier, on note  $b_w = \theta_w((1 \dots \ell(w)))$ . Pour toutes matrices  $A_1, \dots, A_q \in \text{GL}_N(\mathbb{C})$ , rappelons que

$$w(A_1, \dots, A_q) = A_{i_1}^{s_w(1)} \dots A_{i_n}^{s_w(n)},$$

puis, notons

$$w^\otimes(A_1, \dots, A_q) = A_{i_1} \otimes \dots \otimes A_{i_n},$$

pour  $s : \{1, \dots, n\}$

$$\overline{w}^{\otimes, s}(A_1, \dots, A_q) = \iota^{(s(1)-1)/2}(A_{i_1}) \otimes \dots \otimes \iota^{(s(n)-1)/2}(A_{i_n})$$

et

$$\overline{w}^\otimes(A_1, \dots, A_q) = \overline{w}^{\otimes, s_w}(A_1, \dots, A_q).$$

Si  $O_1, \dots, O_q \in \text{O}(N)$ ,

$$\text{Tr}(b_w w^\otimes(O_1, \dots, O_q)) = \text{Tr}(w^\pm(O_1, \dots, O_q)),$$

si  $U_1, \dots, U_q \in \text{U}(N)$ ,

$$\text{Tr}(b_w \overline{w}^\otimes(U_1, \dots, U_q)) = \text{Tr}(w(U_1, \dots, U_q)),$$

tandis que si  $S_1, \dots, S_q \in \text{Sp}(2N)$ ,

$$(-1)^n \text{Tr}(\rho(b_w) w^\otimes(S_1, \dots, S_q)) = -\text{Tr}(w^\pm(S_1, \dots, S_q)).$$

Considérons trois familles  $(O_{i,t})_{1 \leq i \leq q, t \geq 0}$ ,  $(U_{i,t})_{1 \leq i \leq q, t \geq 0}$  et  $(S_{i,t})_{1 \leq i \leq q, t \geq 0}$  formées de  $q$  mouvements browniens indépendants sur respectivement  $\text{O}(N)$ ,  $\text{U}(N)$  et  $\text{Sp}(2N)$ . La formule d'Itô et un raisonnement analogue au Lemme 3.1.7 du chapitre précédent impliquent le lemme suivant. Pour  $t \in \mathbb{R}_+^q$ , notons

$$w_{\text{O},t}^\otimes = w^\otimes(O_{1,t_1}, \dots, O_{q,t_q}),$$

$$w_{\text{S},t}^\otimes = w^\otimes(S_{1,t_1}, \dots, S_{q,t_q})$$

et pour  $s : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{-1, 1\}$ ,

$$\overline{w}_{\text{U},t}^{\otimes, s} = \overline{w}^{\otimes, s}(U_{1,t_1}, \dots, U_{q,t_q}).$$

Rappelons que pour tout  $f \in \{1, \dots, q\}$ ,  $\bar{n}_w(f)$  désigne le nombre d'occurrences des lettres  $x_f$  et  $x_f^{-1}$  dans le mot  $w$  et notons  $X_f(w)$  l'ensemble  $\{i \in \{1, \dots, n\} : w_i \in \{x_f, x_f^{-1}\}\}$ .

**Lemme 4.2.1.** Pour tout  $t \in \mathbb{R}_+^q$  et toute partitions  $\mathcal{V} \leq \mathcal{W}$ ,

$$e^{\frac{N-1}{2N} \sum_{k=1}^q \bar{n}_w(k) t_k} k_{\mathcal{V}, \mathcal{W}}(w_{O,t}^{\otimes}) = \sum_{m \geq 0} \frac{(-1)^m}{N^m m!} \sum t_{w_{i_1}} \cdots t_{w_{i_m}} \rho_N \left( T_{i_1, j_1}^{\varepsilon_1} \cdots T_{i_m, j_m}^{\varepsilon_m} \right),$$

$$e^{\frac{2N+1}{4N} \sum_{k=1}^q \bar{n}_w(k) t_k} k_{\mathcal{V}, \mathcal{W}}(w_{S,t}^{\otimes}) = \sum_{m \geq 0} \frac{(-1)^m}{(-2N)^m m!} \sum t_{w_{i_1}} \cdots t_{w_{i_m}} \rho_{-2N} \left( T_{i_1, j_1}^{\varepsilon_1} \cdots T_{i_m, j_m}^{\varepsilon_m} \right),$$

la deuxième somme portant dans ces deux égalités, sur les suites de signes  $\varepsilon \in \{-1, 1\}^m$  et les paires d'entiers  $i_1 < j_1, \dots, i_m < j_m$ , telles que pour tout  $k$ ,  $w_{i_k} \in \{w_{j_k}, w_{j_k}^{-1}\}$  et  $1_{\{i_1, j_1\}} \vee \dots \vee 1_{\{i_m, j_m\}} \vee \mathcal{V} = \mathcal{W}$ . Pour  $s : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{-1, 1\}$ , le cumulante  $e^{\frac{1}{2} \sum_{k=1}^q \bar{n}_w(k) t_k} k_{\mathcal{V}, \mathcal{W}}(\bar{w}_{U,t}^{\otimes, s})$  est égal à

$$\sum_{m \geq 0} \frac{(-1)^m}{N^m m!} \sum_{\substack{i_1 < j_1, \dots, i_m < j_m \\ \mathcal{V} \vee 1_{\{i_1, j_1\}} \vee \dots \vee 1_{\{i_m, j_m\}} = \mathcal{W} \\ w_{i_k} \in \{w_{j_k}, w_{j_k}^{-1}\}}} t_{w_{i_1}} \cdots t_{w_{i_m}} \rho_N \left( T_{i_1, j_1}^{s, +} \cdots T_{i_m, j_m}^{s, +} \right).$$

Posons dès lors pour tout mot  $w \in W_q$  et tout diagramme de Brauer partiel  $(b, \pi) \in \mathcal{PB}_n$  et  $s \in \mathcal{O}_{b, \pi}$ ,

$$\varphi_{N,t}^w(b, \pi) = N^{2\#\pi - \#b - 2} \text{Tr}(bk_{\pi, 1_n}(w_{O,t}^{\otimes})),$$

$$\varphi_{-2N,t}^w(b, \pi) = (-1)^n (-2N)^{2\#\pi - \#b - 2} \text{Tr}(\rho_{-2N}(b) k_{\pi, 1_n}(w_{S,t}^{\otimes}))$$

et pour  $s : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{-1, 1\}$ ,

$$\varphi_{N,s,t}^w(b, \pi) = N^{2\#\pi - \#b - 2} \text{Tr}(bk_{\pi, 1_n}(\bar{w}_{U,t}^{\otimes, s})).$$

Ces fonctions contiennent l'information nécessaire pour étudier le comportement asymptotique des traces de mots en des mouvements browniens. En effet, pour toute permutation  $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ ,

$$\varphi_{N,t}^w(\theta_w(\sigma), \pi_\sigma) = N^{2(\#\sigma - 1)} k_{\#\sigma}(\text{tr}(w_{j_1} \dots w_{j_l}(O_{1,t_1}, \dots, O_{q,t_q})), (j_1 \cdots j_l) \text{ cycle de } \sigma)$$

et

$$\varphi_{-2N,t}^w(\theta_w(\sigma), \pi_\sigma) = (2N)^{2(\#\sigma - 1)} k_{\#\sigma}(\text{tr}(w_{j_1} \dots w_{j_l}(S_{1,t_1}, \dots, S_{q,t_q})), (j_1 \cdots j_l) \text{ cycle de } \sigma).$$

En procédant de la même manière que dans le Lemme 3.1.7 du chapitre précédent, on généralise légèrement le Lemme 4.1.4 en formulant les équations différentielles suivantes satisfaites par les fonctions  $\tilde{\varphi}_{N,t}^w$ ,  $\tilde{\varphi}_{-2N,t}^w$  et  $\tilde{\varphi}_{N,t}^w$  qui à  $(b, \pi) \in \mathcal{PB}_n$  associent

$$\tilde{\varphi}_{z,t}^w(b, \pi) = z^{\#b - 2(\#\pi - 1)} \varphi_{N,t}^w(b, \pi),$$

avec  $z \in \{N, -2N\}$  et

$$\tilde{\varphi}_{z,s,t}^w(b, \pi) = N^{\#b - 2(\#\pi - 1)} \varphi_{N,t}^w(b, \pi).$$

**Lemme 4.2.2.** Pour tout diagramme de Brauer partiel  $(b, \pi) \in \mathcal{PB}_n$ ,  $f \in \{1, \dots, q\}$  pour  $z \in \{N, -2N\}$ ,

$$\frac{d}{dt_f} \tilde{\varphi}_{z,t}^w(b, \pi) = -\tilde{\varphi}_{N,t}^w \left( \frac{n}{2} \left( 1 - \frac{1}{z} \right) (b, \pi) + \sum_{\substack{1 \leq i < j \leq n, i, j \in X_f(w) \\ \varepsilon \in \{-1, 1\}}} (b, \pi) \bar{T}_{i,j}^\varepsilon \right),$$



où la multiplication est effectuée dans l'algèbre  $\mathcal{B}_n(z)$ , tandis que

$$\frac{d}{dt_f} \tilde{\varphi}_{N,s,t}^w(b, \pi) = -\tilde{\varphi}_{N,t}^w \left( \frac{n}{2}(b, \pi) + \sum_{\substack{1 \leq i < j \leq n \\ i, j \in X_f(w)}} (b, \pi) \overline{T}_{i,j}^{s,+} \right).$$

Définissons pour tout  $f \in \{1, \dots, q\}$  et  $\phi \in \mathcal{PB}_n^*$ ,

$$L_f(\phi)(b, \pi) = -\frac{n}{2}\phi(b, \pi) - \sum \phi((b, \pi) \circ \overline{T}_{i,j}^\varepsilon),$$

la somme étant effectuée sur les paires  $i < j$  d'éléments de  $X_f(w)$  et les signes  $\varepsilon \in \{-1, 1\}$  tels que  $\Delta((b, \pi), \overline{T}_{i,j}^\varepsilon) = 1$ , c'est-à-dire, tels que  $i \not\sim_\pi j$  ou  $i \sim_{\pi_b} j$  et  $s_b(i)s_b(j) = \varepsilon$ ,

$$C_f(\phi)(b, \pi) = \frac{n}{2}\phi(b, \pi) - \sum_{\substack{i < j, i, j \in X_f(w) \\ i \sim_{\pi_b} j}} \phi((b, \pi) \circ \overline{T}_{i,j}^{s_b, -})$$

et

$$D_f(\phi)(b, \pi) = -\sum \phi((b, \pi) \circ \overline{T}_{i,j}^\varepsilon),$$

la somme est effectuée sur les paires  $i < j$  d'éléments de  $X_f(w)$  et les signes  $\varepsilon \in \{-1, 1\}$  tels que  $\Delta((b, \pi), \overline{T}_{i,j}^\varepsilon) = -1$ , c'est-à-dire, tels que  $i \not\sim_{\pi_b} j$  et  $i \sim_\pi j$ . On a alors pour tout  $(b, \pi) \in \mathcal{PB}_n$  et  $z \in \{-2N, N\}$ ,

$$\varphi_{z,t}^w(b, \pi) = \exp\left(\sum_{k=1}^q t_k(L_k + \frac{1}{z}C_k + \frac{1}{z^2}D_k)\right)(\mathbf{1}_{1_n})(b, \pi).$$

Introduisons l'analogie des opérateurs définis ci-dessus pour l'étude de mouvements browniens unitaires. Pour  $s : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{-1, 1\}$ ,  $f \in \{1, \dots, q\}$ ,  $\phi \in \mathcal{PB}_n^{s*}$  et  $(b, \pi) \in \mathcal{PB}_n^s$ , posons

$$L_{s,f}(\phi)(b, \pi) = -\frac{n}{2}\phi(b, \pi) - \sum_{\substack{i < j, i, j \in X_f(w) \\ i \sim_{\pi_b} j \text{ ou } i \not\sim_\pi j}} \phi((b, \pi) \circ \overline{T}_{i,j}^{s,+})$$

et

$$D_{s,f}(\phi)(b, \pi) = -\sum_{\substack{i < j, i, j \in X_f(w) \\ i \not\sim_{\pi_b} j \text{ et } i \sim_\pi j}} \phi((b, \pi) \circ \overline{T}_{i,j}^{s,+}).$$

On a alors pour tout  $(b, \pi) \in \mathcal{PB}_n^s$ ,

$$\varphi_{N,s,t}^w(b, \pi) = \exp\left(\sum_{f=1}^q t_k(L_{s,f} + \frac{1}{N^2}D_{s,f})\right)(\mathbf{1}_{1_n})(b, \pi).$$

Pour toute famille de mots  $w_1, \dots, w_m \in W_q$  et  $t \in \mathbb{R}_+^q$ , notons

$$k_{O,t}^N(w_1, \dots, w_m) = N^{2(m-1)}k_m(\text{tr}(w_1((O_{i,t_i})_{1 \leq i \leq q})), \dots, \text{tr}(w_m((O_{i,t_i})_{1 \leq i \leq q}))),$$

$$k_{U,t}^N(w_1, \dots, w_m) = N^{2(m-1)}k_m(\text{tr}(w_1((U_{i,t_i})_{1 \leq i \leq q})), \dots, \text{tr}(w_m((U_{i,t_i})_{1 \leq i \leq q})))$$

et

$$k_{S,t}^N(w_1, \dots, w_m) = (2N)^{2(m-1)}k_m(\text{tr}(w_1((S_{i,t_i})_{1 \leq i \leq q})), \dots, \text{tr}(w_m((S_{i,t_i})_{1 \leq i \leq q}))).$$

On peut maintenant exprimer la généralisation suivante du Théorème 4.1.7.

**Théorème 4.2.3.** Soient  $w_1, \dots, w_m \in W_q$ ,  $t \in \mathbb{R}_+^q$ , les trois suites  $(k_{O,t}^N(w_1, \dots, w_m))_{N \geq 1}$ ,  $(k_{U,t}^N(w_1, \dots, w_m))_{N \geq 1}$  et  $(k_{S,t}^N(w_1, \dots, w_m))_{N \geq 1}$  admettent chacune une limite quand  $N \rightarrow \infty$ . La troisième coïncide avec la première, on les note  $k_t(w_1, \dots, w_m)$ . On désigne la deuxième par  $k_t^+(w_1, \dots, w_m)$ . Ces limites sont reliées par l'équation

$$k_t(w_1, \dots, w_m) = \sum_{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{m-1} \in \{-1, 1\}} k_t^+(w_1^{\varepsilon_1}, \dots, w_{m-1}^{\varepsilon_{m-1}}, w_m).$$

*Preuve.* Notons  $w = w_1 \dots w_m$ ,  $n = \ell(w)$ ,  $b_S = b_{w_1} \times \dots \times b_{w_m} \in \mathcal{B}_n$  et  $\pi_S = \pi_{b_S}$ . Les trois suites considérées coïncident avec  $(\varphi_{N,t}^w(b_S, \pi_S))_{N \geq 1}$ ,  $(\varphi_{N,s_w,t}^w(b_S, \pi_S))_{N \geq 1}$  et  $(\varphi_{2N,t}^w(b_S, \pi_S))_{N \geq 1}$ . Pour  $(b, \pi) \in \mathcal{PB}_n$ , notons  $\varphi_t^w(b, \pi) = \exp(\sum_{f=1}^q t_f L_f)(\mathbf{1}_{1_n})(b, \pi)$  et pour  $s \in \mathcal{O}_b$ ,

$$\varphi_{t,s}^w(b, \pi) = \exp\left(\sum_{f=1}^q t_f L_{s,f}\right)(\mathbf{1}_{1_n})(b, \pi).$$

La première et la troisième suite convergent vers  $\varphi_t^w(b_S, \pi_S)$  tandis que la deuxième converge vers  $\varphi_{t,s_w}^w(b_S, \pi_S)$ . Notons  $\mathcal{PB}_n^S$  le sous-espace vectoriel de  $\mathcal{PB}_n$  engendrée par les diagrammes de Brauer partiels  $(b, \pi)$  tels que  $\pi \geq \pi_S$  et  $s_{b|B} = \pm s_{w|B}$  pour tout bloc  $B$  de  $\pi$ . On définit pour tout  $t \in \mathbb{R}_+^q$ , une forme linéaire  $\psi_t^w \in \mathcal{PB}_n^{S,*}$  en posant pour tout  $(b, \pi) \in \mathcal{PB}_n^S$ ,

$$\psi_t^w(b, \pi) = \sum_{s \in \mathcal{O}_{b,\pi}, s(1)=1} \varphi_{t,s}^w(b, \pi).$$

La seconde partie de l'énoncé du Théorème équivaut à montrer que  $\psi_t^w(b_S, \pi_S) = \varphi_t^w(b_S, \pi_S)$ . De même que dans la preuve du Théorème 4.1.7, on montre que les fonctions  $t \in \mathbb{R}_+^q \mapsto \psi_t^w, \varphi_t^w \in \mathcal{PB}_n^{S,*}$  satisfont le même système différentiel avec les mêmes conditions initiales.  $\square$

Notons  $m_t(w)$  le résidu en 0 de la fonction  $z \mapsto \varphi_{z,t}^w((1 \dots \ell(w)), 1_{\ell(w)})$ . On en déduit aisément une généralisation de la Proposition 4.1.9.

**Corollaire 4.2.4.** Les vecteurs aléatoires  $(\text{Tr}(w(O_{t_k}), 1 \leq k \leq q) - Nk_t(w))_{w \in W_q}$  et  $(\text{Tr}(w(S_{t_k}), 1 \leq k \leq q) - 2Nk_t(w))_{w \in W_q}$  convergent vers des vecteurs gaussiens de même matrice de covariance  $(k_t(w_1, w_2))_{w_1, w_2 \in W_q}$  et de moyenne respective  $(m_t(w))_{w \in W_q}$  et  $(-m_t(w))_{w \in W_q}$ .

**Vitesse de convergence :** On obtient maintenant des bornes sur la vitesse de convergence quand  $N \rightarrow \infty$  des quantités définies ci-dessus en fonction de la complexité des mots auxquelles elles sont associées. On remarquera que, de même que pour le champ maître d'ordre 1, ces bornes sont moins bonnes pour les groupes orthogonaux et symplectiques que pour les groupes unitaires.

**Lemme 4.2.5.** i) Pour toute famille de mots  $w_1, \dots, w_m \in W_q$  et  $t \in \mathbb{R}_+^q$ ,  $z \in \{-2N, N\}$ ,

$$|k_t^z(w_1, \dots, w_m) - k_t(w_1, \dots, w_m)| \leq \frac{2(\bar{A}(w_1) + \dots + \bar{A}(w_m))}{|z|} e^{2(\bar{A}(w_1) + \dots + \bar{A}(w_m))}$$

et pour tout  $r \in \mathbb{N}^*$ ,

$$\max\{|\partial_\alpha^r k_{\alpha,t}^z(w_1, \dots, w_m)|, |\partial_\alpha^r k_{\alpha,t}(w_1, \dots, w_m)|\} \leq 2^r (\bar{A}(w_1) + \dots + \bar{A}(w_m))^r e^{2(\bar{A}(w_1) + \dots + \bar{A}(w_m))}.$$

ii) Pour tout mot  $w \in W_q$ ,  $\{|\mathbb{E}[\text{Tr}(w((O_{t_k})_{1 \leq k \leq q}))] - Nk_t(w) - m_t(w)|$  et  $|\mathbb{E}[\text{Tr}(w((S_{t_k})_{1 \leq k \leq q}))] - 2Nk_t(w) + m_t(w)|\}$  sont majoré par

$$\frac{8 \max\{(\bar{A}(w_1) + \dots + \bar{A}(w_m))^2, 1\}}{|z|} e^{2(\bar{A}(w_1) + \dots + \bar{A}(w_m))}$$

*Preuve.* i) Pour tout  $k \in \{1, \dots, q\}$ ,  $|z| \geq 1$ ,

$$\max\{\|L_k\|, \|C_k\|, \|D_k\|, \|C_k + \frac{1}{z}D_k\|, \|L_k + \frac{1}{z}C_k + \frac{1}{z^2}D_k\|\} \leq \bar{n}_w(k)^2.$$

On obtient alors le résultat en suivant la même preuve que pour le Théorème 4.2.5 du chapitre précédent.

ii) Pour tout  $w \in W_q$ ,  $\mathbb{E}[\text{Tr}(w((O_{t_k})_{1 \leq k \leq q}))] = \varphi_{N,t}^w(b_w, 1_{\ell(w)})$  tandis que  $\mathbb{E}[\text{Tr}(w((S_{t_k})_{1 \leq k \leq q}))] = \varphi_{-2N,t}^w(b_w, 1_{\ell(w)})$ . Si  $(M_k)$  est l'une des familles d'opérateurs  $(L_k)$ ,  $(C_k)$  ou  $(D_k)$ , notons  $M_{w,t} = \sum_{k=1}^q t_k M_k$ . Notons  $r_{2,z,t}(w) = \varphi_{z,t}^w(b_w, 1_{\ell(w)}) - \varphi_t^w(b_w, 1_{\ell(w)}) - z^{-1}m_t(w)$ , de sorte que les deux quantités à majorer sont  $Nr_{2,N,t}(w)$  et  $-2Nr_{2,-2N,t}(w)$ . Pour tout  $z \in \mathbb{C}^*$ , considérons l'opérateur  $R_{2,z,t} = z(e^{L+\frac{1}{z}C+\frac{1}{z^2}D} - e^L) - \int_0^1 e^{(1-s)L} C e^{sL} ds$  agissant sur  $\mathcal{PB}_n^*$ . Alors  $zr_{2,z,t}(w) = R_{2,z,t}(\mathbf{1}_{1_n})(b_w, 1_{\ell(w)})$  et

$$\begin{aligned} R_{2,z,t} &= \int_0^1 (e^{(1-s)(L+\frac{1}{z}C+\frac{1}{z^2}D)} - e^{(1-s)L}) C e^{(1-s)L} ds + \frac{1}{z} \int_0^1 e^{(1-s)L} D e^{sL} ds \\ &= \frac{1}{z} \int_{0 < u < v < 1} e^{(1-v)(L+\frac{1}{z}C+\frac{1}{z^2}D)} (C + \frac{1}{z}D) e^{(v-u)L} C e^{uL} dudv + \frac{1}{z} \int_0^1 e^{(1-s)L} D e^{sL} ds. \end{aligned}$$

Les bornes données dans la preuve du i) entraînent que

$$\|R_{2,z,t}\| \leq \frac{8 \max\{(\bar{A}(w_1) + \dots + \bar{A}(w_m))^2, 1\}}{|z|} e^{2(\bar{A}(w_1) + \dots + \bar{A}(w_m))}.$$

L'inégalité  $\|R_{2,z,t}(\mathbf{1}_{1_n})\|_\infty \leq \|R_{2,z,t}\| \|\mathbf{1}_{1_n}\|_\infty = \|R_{2,z,t}\|$  conclut la démonstration.  $\square$

#### 4.2.2 Champ maître non orienté d'ordre supérieur

On désigne ici par  $YM^{O(N)}$  et  $YM^{\text{Sp}(2N)}$  la mesure de Yang-Mills sur le plan Euclidien pour les groupes  $O(N)$  et  $\text{Sp}(2N)$ . On note pour tout  $N \in \mathbb{N}$  et tout écheveau  $\mathcal{S} = \{l_1, \dots, l_m\}$ ,

$$\Phi^N(\mathcal{S}) = N^{2(m-2)} k_m^{YM^{O(N)}} (\text{Tr}(H_{l_1}), \dots, \text{Tr}(H_{l_m})),$$

$$\Phi^{-2N}(\mathcal{S}) = (2N)^{2(m-2)} k_m^{YM^{\text{Sp}(2N)}} (\text{Tr}(H_{l_1}), \dots, \text{Tr}(H_{l_m}))$$

et

$$\Phi^{N,+}(\mathcal{S}) = N^{2(m-2)} k_m^{YM^{U(N)}} (\text{Tr}(H_{l_1}), \dots, \text{Tr}(H_{l_m})).$$

Rappelons que  $\mathcal{E}_A$  l'ensemble des écheveaux formés de lacets affines par morceaux avec un nombre fini d'intersections. Pour tout  $\mathcal{S} \in \mathcal{E}_A$ , il existe  $f \in \mathbb{N}^*$ ,  $t \in \mathbb{R}_+^f$ ,  $w \in W_f$  et  $b \in \mathcal{B}_{\ell(w)}$  tels que  $\Phi^z(\mathcal{S}) = \varphi_{z,t}^w(b, \pi_b)$ , pour  $z \in \{-2N, N\}$  et  $\Phi^{N,+}(\mathcal{S}) = \varphi_{z,+,t}^w(b, \pi_b)$ . On peut en particulier définir des fonctions holomorphes  $z \in \mathbb{C}^* \mapsto \Phi^z(\mathcal{S})$ ,  $\Phi^{z,+}(\mathcal{S})$ . On généralise maintenant les résultats de la section 3.3 du chapitre précédent grâce aux résultats de la partie 4.2.1. Pour tout écheveau  $\mathcal{S} \in \mathcal{E}_A$ , notons

$$\Phi(\mathcal{S}) = \lim_{|z| \rightarrow \infty} \Phi^z(\mathcal{S}),$$

$$\Phi^+(\mathcal{S}) = \lim_{|z| \rightarrow \infty} \Phi^{z,+}(\mathcal{S})$$

et

$$\mathbf{m}(\mathcal{S}) = \lim_{|z| \rightarrow \infty} z(\Phi^z(\mathcal{S}) - \Phi(\mathcal{S}))$$

le résidu en 0 de la fonction  $z \mapsto \Phi^z(\mathcal{S})$ .

**Théorème 4.2.6.** *Soit  $K > 0$ . Pour tout écheveau  $\mathcal{S} \in \mathcal{E}_A$  de lacets de longueur inférieur à  $K > 1$ , à valeurs dans la boule de rayon  $K$  centrée en 0, pour  $z \in \{-2N, N\}$ ,*

$$|\Phi^z(\mathcal{S}) - \Phi(\mathcal{S})| \leq \frac{72m^2 K^2}{|z|} e^{72\pi m^2 K^2}$$

et

$$|\max |N(\Phi^N(\mathcal{S}) - \Phi(\mathcal{S})) - \mathbf{m}(\mathcal{S})|, |2N(\Phi^{-2N}(\mathcal{S}) - \Phi(\mathcal{S})) + \mathbf{m}(\mathcal{S})|| \leq \frac{288m^4 K^4}{|z|} e^{\pi 72m^2 K^2}.$$

D'après le Théorème 3.3.12 du chapitre précédent, pour tout écheveau  $\mathcal{S}$ ,  $\Phi^{N,+}(\mathcal{S})$  converge. On note ici  $\Phi^+(\mathcal{S})$  sa limite. On en déduit le théorème suivant.

**Théorème 4.2.7.** *Pour tout écheveau  $\mathcal{S}$ , les deux suites  $\Phi^{-2N}(\mathcal{S})$  et  $\Phi^N(\mathcal{S})$  convergent vers la même limite que l'on dénote  $\Phi(\mathcal{S})$ . La fonction  $\Phi_m : (l_1, \dots, l_m) \in \mathbb{L}(\mathbb{R}^2) \mapsto \Phi\{l_1, \dots, l_m\} \in \mathbb{R}$  est symétrique, continue<sup>2</sup>, indépendante de l'orientation des lacets et vérifie pour tout écheveau  $\mathcal{S} = \{l_1, \dots, l_m\}$ ,*

$$\Phi_m(l_1, \dots, l_m) = \sum_{\varepsilon \in \{-1, 1\}^{m-1}} \Phi^+(l_1^{\varepsilon_1}, \dots, l_{m-1}^{\varepsilon_{m-1}}, l_m).$$

*En outre, pour tout écheveau  $\mathcal{S}$ , les suites  $N(\Phi^N(\mathcal{S}) - \Phi(\mathcal{S}))$  et  $2N(\Phi(\mathcal{S}) - \Phi^{-2N}(\mathcal{S}))$  convergent vers une même limite  $\mathbf{m}(\mathcal{S})$ . La fonction  $\mathbf{m} : \mathbb{L}(\mathbb{R}^2)^m \rightarrow \mathbb{R}^2$  est symétrique, continue et prolonge la fonction  $\mathbf{m} : \mathcal{E}_A^m \rightarrow \mathbb{R}$  définie ci-dessus.*

La démonstration de ce Théorème est très proche de celle du Théorème 4.12. Esquissons une preuve.

*Preuve.* Pour tout écheveau affine par morceaux  $\mathcal{S} \in \mathcal{E}_A$ ,  $\Phi^{-2N}(\mathcal{S})$  et  $\Phi^N(\mathcal{S})$  converge quand  $N \rightarrow \infty$  vers la même limite que l'on note  $\Phi(\mathcal{S})$ . Les fonctions  $\Phi^N, \Phi^{-2N} : \mathbb{L}(\mathbb{R}^2) \rightarrow \mathbb{R}$  sont continues. Deux applications successives du Théorème 4.2.6 permettent d'en déduire que les fonctions  $\Phi, \mathbf{m} : \mathbb{L}(\mathbb{R}^2)^m \rightarrow \mathbb{R}$  le sont aussi et qu'elles sont respectivement limites de  $\Phi^N, \Phi^{-2N}$  et  $N(\Phi^N(\mathcal{S}) - \Phi(\mathcal{S})), 2N(\Phi(\mathcal{S}) - \Phi^{-2N}(\mathcal{S}))$ .  $\square$

Pour tout  $m \geq 3$ , soient  $l_1, \dots, l_m$   $m$  lacets de longueurs finies, les suites de cumulants  $k_m^{YM^{O(N)}}(\text{Tr}(H_{l_1}), \dots, \text{Tr}(H_{l_m}))$  et  $k_m^{YM^{\text{Sp}(2N)}}(\text{Tr}(H_{l_1}), \dots, \text{Tr}(H_{l_m}))$  convergent vers 0, quand  $N \rightarrow \infty$ . On en déduit le Corollaire suivant.

**Corollaire 4.2.8.** *Les vecteurs aléatoires  $(\text{Tr}(H_l) - N\Phi(l))_{l \in \mathbb{L}(\mathbb{R}^2)}$ , sous  $YM^{O(N)}$ , et  $(\text{Tr}(H_l) - 2N\Phi(l))_{l \in \mathbb{L}(\mathbb{R}^2)}$ , sous  $YM^{\text{Sp}(2N)}$ , convergent faiblement vers  $(\mathbf{m}(l) + \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_l + \phi_{l-1}))_{l \in \mathbb{L}(\mathbb{R}^2)}$  et  $(-\mathbf{m}(l) + \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_l + \phi_{l-1}))_{l \in \mathbb{L}(\mathbb{R}^2)}$ .*

La fonction de moyenne  $\mathbf{m}$  peut être déterminée par des équations analogues aux équations de Makeenko-Midgal.

---

2. Rappelons que l'on considère la topologie de la convergence en variation à extrémités fixées.

**Théorème 4.2.9.** *Pour tout lacet  $l \in L(\mathbb{R}^2)$  tracé dans un graphe plongé  $\mathbb{G}$ . Si  $x$  est un point d'intersection simple de  $l$ , soit  $F_1, \dots, F_4$  les quatres faces situées autour de  $x$ , où  $F_1$  est bordée par une arête sortante et une arête entrante en  $x$ . Désignons par  $l_g$  et  $l_d$  les deux lacets basés en  $x$  tels que à changement de point base près  $l = l_g l_d$  et notons  $\tilde{l} = l_g l_d^{-1}$ . Alors*

$$\left( \frac{d}{d|F_1|} - \frac{d}{d|F_2|} + \frac{d}{d|F_3|} - \frac{d}{d|F_4|} \right) \mathbf{m}(l) = \Phi(\tilde{l}) - \mathbf{m}(l_g)\Phi(l_d) - \Phi(l_g)\mathbf{m}(l_d). \quad (\text{MM}')$$

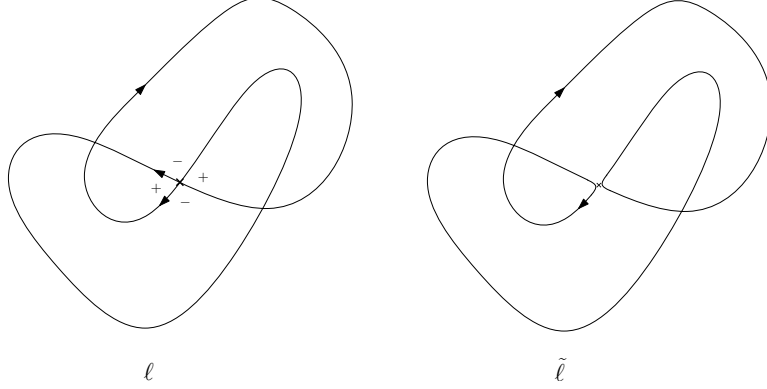


FIGURE 4.1 – Transformation  $l \mapsto \tilde{l}$  apparaissant dans l'équation de Makeenko-Migal pour la moyenne  $\mathbf{m}$ .

*Preuve.* Une démonstration analogue à 3.4.2 (une preuve différente est donnée dans [35]) montre que

$$\begin{aligned} \left( \frac{d}{d|F_1|} - \frac{d}{d|F_2|} + \frac{d}{d|F_3|} - \frac{d}{d|F_4|} \right) \mathbb{E}^{YM^{O(N)}} [\text{Tr}(H_l)] &= \frac{1}{N} \mathbb{E}^{YM^{O(N)}} [\text{Tr}(H_{\tilde{l}})] \\ &\quad - \frac{1}{N} \mathbb{E}^{YM^{O(N)}} [\text{Tr}(H_{l_g}) \text{Tr}(H_{l_d})], \end{aligned}$$

tandis que l'équation de Makeenko-Midgal montre que

$$\left( \frac{d}{d|F_1|} - \frac{d}{d|F_2|} + \frac{d}{d|F_3|} - \frac{d}{d|F_4|} \right) \Phi(l) = -\Phi(l_g)\Phi(l_d).$$

Rappelons que  $\mathbf{m}(l) = \lim_{N \rightarrow \infty} N \left( \mathbb{E}^{YM^{O(N)}} [\text{tr}(H_l)] - \Phi(l) \right)$  et la convergence a lieu dans  $C^\infty(\mathbb{R}_+^{\mathbb{F}}, \mathbb{R})$ . On en déduit que  $\left( \frac{d}{d|F_1|} - \frac{d}{d|F_2|} + \frac{d}{d|F_3|} - \frac{d}{d|F_4|} \right) \mathbf{m}(l)$  vaut

$$\Phi(\tilde{l}) + \lim_{N \rightarrow \infty} N \left( \Phi(l_g)\Phi(l_d) - \mathbb{E}^{YM^{O(N)}} [\text{tr}(H_{l_g})\text{tr}(H_{l_d})] \right).$$

Cette limite se reformule

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} N \left( \left( \Phi(l_g) - \mathbb{E} [\text{tr}(H_{l_g})] \right) \Phi(l_d) + \left( \Phi(l_d) - \mathbb{E} [\text{tr}(H_{l_d})] \right) \Phi(l_g) + \frac{1}{N^2} \text{cov}(\text{Tr}(H_{l_g}), \text{Tr}(H_{l_d})) \right) \\ = -\mathbf{m}(l_g)\Phi(l_d) - \Phi(l_g)\mathbf{m}(l_d). \end{aligned}$$

□

**Lemme 4.2.10.** *La fonction  $\mathbf{m} : L_0(\mathbb{R}^2) \rightarrow \mathbb{R}$  est l'unique fonction continue en 1-variation telle que  $\mathbf{m}(cst_0) = 0$  et pour tout lacet  $l$  tracé dans un graphe plongé, vu la fonction de  $\mathbb{R}_+^{\mathbb{F}}$  induite par  $\mathbf{m}(l)$  est  $C^1$ , l'équation (MM') est satisfaite en chaque point d'intersection simple de  $l$ , et pour toute face  $F$  de  $\mathbb{G}$ , voisine de la face infinie,*

$$\frac{d}{d|F|} \mathbf{m}(l) = -\frac{1}{2} \mathbf{m}(l). \quad (4.11)$$

*Preuve.* Pour tout lacet  $l$  tracé dans un graphe plongé  $\mathbb{G}$ , les fonctions  $\mathbb{E}^{YM^{O(N)}}[\text{tr}(H_l)]$  et  $\Phi(l)$  satisfont (4.11) et on en déduit que  $\mathbf{m}$  la satisfait aussi. Si  $\mathcal{E}$  désigne l'ensemble des lacets affines par morceaux avec un nombre fini d'intersections, toute fonction  $\tilde{\mathbf{m}}$  continue pour la distance en 1-variation sur  $L(\mathbb{R}^2)$  est caractérisée par sa restriction à  $\mathcal{E}$ . Supposons que  $\tilde{\mathbf{m}}$  vérifie les hypothèses du lemme. D'après le Lemme 3.4.5 du chapitre 2, si  $\mathbb{G}$  est le plus petit graphe plongé contenant  $l$ , les dérivées  $\frac{d}{d|F|} \tilde{\mathbf{m}}(l)$  où  $F \in \mathbb{F}$  sont caractérisées par les équations (MM') et (4.11). Les lacets  $l_g$  et  $l_d$  admettent strictement moins de points d'intersection que  $l$ . On en déduit par récurrence sur le nombre de points d'intersection d'un lacet de  $\mathcal{E}$  que  $\tilde{\mathbf{m}}|_{\mathcal{E}} = \mathbf{m}|_{\mathcal{E}}$ .  $\square$

Remarquons que si  $l \in L(\mathbb{R}^2)$  est un lacet simple alors  $\mathbf{m}(l) = 0$ .

### 4.3 Fluctuations microscopiques

On va utiliser dans cette section les outils développés ci-dessus pour estimer d'autres fonctionnelles du mouvement brownien. On va en particulier étudier les sous-matrices principales d'un mot en des mouvements browniens sur les trois séries de groupes compacts  $U(N)$ ,  $O(N)$  et  $Sp(2N)$ .

Désignons par  $(G_{l,t}^N)_{1 \leq l \leq q, t \geq 0}$   $q$  mouvements browniens indépendants sur chacun des trois groupes compacts  $O(N)$ ,  $U(N)$  et  $Sp(2N)$ , quand la lettre  $G$  est respectivement remplacée par  $O, U$  ou  $S$ . Notons  $\alpha_G$  l'opérateur d'adjonction sur  $M_N(\mathbb{C})$  pour les formes  $\mathbb{R}$ -biliénaires associées à chacun de ces trois groupes, pour tout  $A \in M_N(\mathbb{C})$ ,  $\alpha_G(A)$  vaut respectivement  $A^t, A^*$  et  $J^{-1}A^tJ$ . Pour  $p \in \mathbb{N}^*$ , désignons par  $W_{p,q}$  l'ensemble des mots formés des lettres  $x_1, x_1^{-1}, \dots, x_q, x_q^{-1}$  et  $y_1, y_1^{-1}, \dots, y_p, y_p^{-1}$ . Pour  $A \in M_N(\mathbb{C})^p, B \in M_N(\mathbb{C})^q$ , introduisons le morphisme de monoïde  $w \in W_{p,q} \mapsto w_G(A, B) \in M_N(\mathbb{C})$  tel que pour  $1 \leq i \leq p$ , et  $1 \leq j \leq q$ ,  $(x_i^\varepsilon)_G(A, B) = \alpha_G^{(1-\varepsilon)/2}(A_i)$  et  $(y_j^\varepsilon)_G(A, B) = \alpha_G^{(1-\varepsilon)/2}(B_j)$ . À un mot  $w \in W_{p,q}$  et des suites  $A^O, A^U \in M_N(\mathbb{C})^p$  et  $A^S \in M_{2N}(\mathbb{C})^p$ , on associe pour tout  $t \in \mathbb{R}_+^q$ , les matrices  $w_{A^G, t}^G = w_G(A^G, (G_{t_i}^N)_{1 \leq i \leq q})$ . Le résultat suivant permet d'étudier la distribution de la mesure empirique des valeurs propres de mouvements browniens indépendants mais aussi celle de leurs sous-matrices de rang fini.

**Théorème 4.3.1.** *Soient  $A_N^G$  trois suites de matrices telles que  $A_N^G \in M_N(\mathbb{C})^p$  si  $G \in \{O, U\}$ ,  $A_N^S \in M_{2N}(\mathbb{C})$  et posons tout mot  $w \in W_p$ ,  $a_w^{N,G} = \text{tr}(w_G(A_N^G))$ . Supposons que pour tout  $w \in W_p$ , les suites de traces  $a_w^{N,G}$  admettent une même limite finie  $a_w$  quand  $N \rightarrow \infty$ , qui ne dépend pas de  $G \in \{O, S, U\}$ . Alors pour tous mots  $w_1, \dots, w_m \in W_{p,q}$ ,*

$$k_{t, a_N}^{N,G}(w_1, \dots, w_m) = N^{2(m-1)} k_m(\text{tr}((w_1)_{A_N^G, t}^G), \dots, \text{tr}((w_m)_{A_N^G, t}^G))$$

pour  $G \in \{O, U\}$  et

$$k_{t, a_N}^{N,S}(w_1, \dots, w_m) = (2N)^{2(m-1)} k_m(\text{tr}((w_1)_{A_N^S, t}^S), \dots, \text{tr}((w_m)_{A_N^S, t}^S))$$

admettent une limite  $k_{t,a}^G(w_1, \dots, w_m)$  quand  $N \rightarrow \infty$ . En outre,

$$k_{t,a}^O(w_1, \dots, w_m) = k_{t,a}^S(w_1, \dots, w_m) = \sum_{\varepsilon \in \{-1, 1\}^{m-1}} k_{t,a}^U(w_1^{\varepsilon_1}, \dots, w_{m-1}^{\varepsilon_{m-1}}, w_m).$$

Supposons que pour tout  $w \in W_p$ , il existe  $d(w) \in \mathbb{R}_+$  tel que  $a_w^{N,G} = O(N^{d(w)})$ . Alors pour tous mots  $w_1, \dots, w_m \in W_{p,q}$ ,  $G \in \{O, S, U\}$ ,

$$k_{t,a}^G(w_1, \dots, w_m) = O(N^{\sup\{d(\eta_1) + \dots + d(\eta_k)\}}),$$

où le supremum est pris sur les familles de mots  $\{\eta_1, \dots, \eta_k\}$  telles que pour tout  $l \in \{1, \dots, p\}$ ,  $\bar{n}_{w_1 \dots w_m}(y_l) = \bar{n}_{\eta_1 \dots \eta_k}(y_l)$ .

Remarquons que si  $(a_w)_{w \in W_p}$  vérifient les conditions de l'énoncé du Théorème alors pour tout  $w \in W_q$ ,  $a_w = a_{w^{-1}} \in \mathbb{R}$ .

*Preuve.* Pour tout mot  $w \in W_{p,q}$ , soit  $w_x \in W_q$  le mot obtenu en effaçant les lettres  $y, y^{-1}$ . Si  $\ell(w_x) = n$ , soit  $w_{x,1}(y), \dots, w_{x,n}(y) \in W_p$  les mots en  $y, y^{-1}$  apparaissant cycliquement dans  $w$ , de sorte que  $w$  soit de la forme  $d_n x_{i_1}^{\varepsilon_1} w_{2,x}(y) x_{i_2}^{\varepsilon_2} \dots w_{x,n}(y) x_{i_n}^{\varepsilon_n} g_n$ , avec  $g_n d_n = w_{x,1}(y)$ . Utilisons les notations tensoriels du début de la section 4.2.1. On a alors,

$$\text{Tr}(w_{A_N^O, t}^O) = \text{Tr}(w^\otimes (A^O) b_{w_x} (w_x)_{t,O}^\otimes)$$

$$\text{Tr}(w_{A_N^S, t}^S) = (-1)^{n+1} \text{Tr}(w^\otimes (A^S) \rho(b_{w_x}) (w_x)_{t,S}^\otimes)$$

et

$$\text{Tr}(w_{A_N^U, t}^U) = \text{Tr}(\bar{w}^\otimes (A^U) b_{w_x} (\bar{w}_x)_{t,U}^\otimes).$$

Soient  $w_1, \dots, w_m \in W_{p,q}$ , posons  $\mathcal{S} = ((w_1)_x, \dots, (w_m)_x) \in W_q^m$ ,

$$\mathcal{S}_{A,N}^{\otimes, G} = w_1^\otimes (A^G) \otimes \dots \otimes w_m^\otimes (A^G),$$

pour  $G \in \{O, S\}$ ,

$$\bar{\mathcal{S}}_{A,N}^{\otimes, U} = \bar{w}_1^\otimes (A^U) \otimes \dots \otimes \bar{w}_m^\otimes (A^U)$$

et  $b_{\mathcal{S}} = b_{(w_1)_x} \times \dots \times b_{(w_m)_x}$ . Les deux égalités précédentes et une légère modification de la preuve du lemme 3.1.6 impliquent que

$$k_{t,a^N}^{N,O}(w_1, \dots, w_m) = \frac{1}{N \# b} \text{Tr}(\mathcal{S}_{A,N}^{\otimes, O} b_{\mathcal{S}} k_{\pi_{b_{\mathcal{S}}}, 1_n}(\mathcal{S}_{t,O}^\otimes)),$$

$$k_{t,a^N}^{N,U}(w_1, \dots, w_m) = \frac{1}{N \# b} \text{Tr}(\mathcal{S}_{A,N}^{\otimes, U} b_{\mathcal{S}} k_{\pi_{b_{\mathcal{S}}}, 1_n}(\bar{\mathcal{S}}_{t,U}^\otimes))$$

et

$$k_{t,a^N}^{N,S}(w_1, \dots, w_m) = (-1)^n \frac{1}{(-2N) \# b} \text{Tr}(\mathcal{S}_{A,N}^{\otimes, S} \rho(b_{\mathcal{S}}) k_{\pi_{b_{\mathcal{S}}}, 1_n}(\mathcal{S}_{t,S}^\otimes)).$$

Notons  $\mathcal{PB}_n^S(z)$  la sous-algèbre de l'algèbre de Brauer murée partielle  $\mathcal{PB}_n^{s_{b_S}}(z)$  engendrée par les diagrammes partiels  $(b, \pi)$  tels que  $\pi \geq \pi_{b_S}$  et  $s_{b|B} = s_{b_S B}$  pour tout bloc de  $\pi$ . Posons alors pour tout  $(b, \pi) \in \mathcal{PB}_n$ ,

$$\varphi_{t,N,A}(b, \pi) = N^{2\#\pi - \#b - 2} \text{Tr}(\mathcal{S}_{A,N}^{\otimes, O} b k_{\pi_{b_S}, 1_n} (\mathcal{S}_{t,O}^{\otimes})),$$

$$\varphi_{t,-2N,A}(b, \pi) = (-2N)^{2\#\pi - \#b - 2} \text{Tr}(\mathcal{S}_{A,N}^{\otimes, S} b k_{\pi_{b_S}, 1_n} (\overline{\mathcal{S}}_{t,S}^{\otimes}))$$

et si  $(b, \pi) \in \mathcal{PB}_n^S$ ,

$$\varphi_{t,N,A}^+(b, \pi) = N^{2\#\pi - \#b - 2} \text{Tr}(\mathcal{S}_{A,N}^{\otimes, U} b k_{\pi_{b_S}, 1_n} (\overline{\mathcal{S}}_{t,U}^{\otimes})).$$

La famille  $(\varphi_{t,z,A})_{t \in \mathbb{R}_+^q}$  de formes linéaires sur  $\mathcal{PB}_n$  vérifie pour tout  $f \in \{1, \dots, q\}$ ,

$$\frac{d}{dt_f} \varphi_{t,z,A_N} = (L_f + \frac{1}{z} C_f + \frac{1}{z^2} D_f)(\varphi_{t,z,A_N}), \quad (4.12)$$

tandis que  $(\varphi_{t,N,A}^+)_{t \in \mathbb{R}_+^q}$  considérée comme une famille de formes linéaires sur  $\mathcal{PB}_n^S$  vérifie

$$\frac{d}{dt_f} \varphi_{t,A_N}^+ = (L_f^+ + \frac{1}{N^2} D_f^+)(\varphi_{t,N,A_N}^+). \quad (4.13)$$

En outre, pour tout  $(b, \pi) \in \mathcal{PB}_n^S$ ,

$$\varphi_{0,N,A}(b, \pi) = \delta_{\pi, 1_n} N^{-\#b} \text{Tr}(w_{A,N}^{\otimes, O} b)$$

et

$$\varphi_{0,-2N,A}(b, \pi) = (-1)^n \delta_{\pi, 1_n} (-2N)^{-\#b} \text{Tr}(w_{A,N}^{\otimes, S} \rho(b))$$

convergent vers une même limite  $\zeta_a(b, \pi)$ , tandis que, pour tout  $(b, \pi) \in \mathcal{PB}_n^S$ ,

$$\varphi_{0,N,A}^+(b, \pi) = \delta_{\pi, 1_n} N^{-\#b} \text{Tr}(w_{A,N}^{\otimes, U} b)$$

convergent vers  $\zeta_a(b, \pi)$ . On en déduit que  $\varphi_{t,N,A}, \varphi_{t,-2N,A} \in \mathcal{PB}_n^*$  et  $\varphi_{t,N,A}^+ \in \mathcal{PB}_n^{S*}$  convergent respectivement vers

$$\varphi_{t,a} = \exp(tL)(\zeta_a)$$

et

$$\varphi_{t,a}^+ = \exp(tL^+)(\zeta_a|_{\mathcal{PB}_n^S}).$$

On en déduit la convergence des trois suites de cumulants. Pour tout  $s : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{-1, 1\}$ , notons  $\theta_s$  la bijection de  $\{1, \dots, n\} \times \{-1, 1\}$  telle que pour tout  $(x, \varepsilon) \in \{1, \dots, n\} \times \{-1, 1\}$ ,  $\theta_s(x, \varepsilon) = (x, s(x)\varepsilon)$ . Pour tout  $(b, \pi) \in \mathcal{PB}_n^S$ , notons

$$\psi_{t,a} = \sum_{s \in \mathcal{O}_{b,\pi}, s(1)=1} \varphi_{t,a}^+(\theta_{ss_b}(b), \pi).$$

Remarquons que puisque  $a_w = a_{w-1} \in \mathbb{R}$ , pour tout  $w \in W_q$ , pour  $(b, \pi) \in \mathcal{PB}_n^S$ ,  $\varphi_{t,a}^+(b, \pi) = \varphi_{t,a}^+(\theta_{-1}(b), \pi)$  et pour tout  $k \in \{1, \dots, n\}$ ,  $\psi_{t,a} = \sum_{s \in \mathcal{O}_{b,\pi}, s(k)=s_b(k)} \varphi_{t,a}^+(\theta_{ss_b}(b), \pi)$ . Pour montrer la deuxième partie du théorème, il faut de montrer que

$$\varphi_{t,a}(b_S, \pi_S) = \psi_{t,a}(b_S, \pi_S).$$



Le même argument utilisé dans la preuve du théorème 4.1.7 montre que les deux fonctions  $t \in \mathbb{R}_+^q \mapsto \psi_{t,a}, \varphi_{t,a} \in \mathcal{PB}_n^{S*}$  vérifient le même système différentiel. On vérifie en outre aisément que les trois formes linéaires  $\varphi_{0,a}, \psi_{0,a}$  et  $\zeta_a$  coïncident sur  $\mathcal{PB}_n^S$ .

On vérifie alors que le contrôle annoncé dans la seconde partie de l'énoncé se déduit des expressions (4.12) et (4.13) des cumulants.  $\square$

Pour  $p \leq N$  deux entiers et  $A \in M_N(\mathbb{C})$ , notons  $P_p(A)$  la sous-matrice principale de  $A$  formée de ses  $p$  premières lignes et de ses  $p$  premières colonnes.

**Corollaire 4.3.2.** *Pour tout mot  $w_1, \dots, w_m$  à  $q$  lettres,  $t \in \mathbb{R}_+^q$  et  $p$  un entier non nul, la famille de matrices de  $M_p(\mathbb{C})$*

$$\sqrt{N} (P_p(w_k(G_{l,t_l}, l \in \{1, \dots, q\})) - \mathbb{E}[P_p(w_k(G_{l,t_l}, l \in \{1, \dots, q\}))])_{1 \leq k \leq m},$$

*converge vers un champ gaussien centré  $(\phi_{w_k}^G)_{1 \leq k \leq m}$  à valeur dans  $M_p(\mathbb{C})$  vérifiant*

$$(\phi_{w_k}^O)_{1 \leq k \leq m} \stackrel{(loi)}{=} \frac{1}{\sqrt{2}} (\phi_{w_k}^U + \phi_{w_k^{-1}}^U)_{1 \leq k \leq m} = \sqrt{2} (\text{Re}(\phi_{w_k}^U))_{1 \leq k \leq m}.$$

*et*

$$(\phi_{w_k}^S)_{1 \leq k \leq m} \stackrel{(loi)}{=} \sqrt{2} (\text{Re}(\phi_{w_k}) + i \text{Re}(\tilde{\phi}_{w_k}))_{1 \leq k \leq m},$$

*où  $((\phi_{w_k})_{1 \leq k \leq m}, (\tilde{\phi}_{w_k})_{1 \leq k \leq m})$  sont deux champs gaussiens indépendants et identiquement distribués ayant même loi que  $(\phi_{w_k}^U)_{1 \leq k \leq m}$ .*

*Preuve.* Considérons  $A_N^G = \sqrt{N}(E_{i,j})_{1 \leq i,j \leq p} \in M_N(\mathbb{C})^{p^2}$ , pour  $G \in \{O, U\}$  et dans le cas symplectique, posons  $A_N^S = \sqrt{N}(E_{i,j} + E_{i+N,j+N})_{1 \leq i,j \leq p}$  et  $B_N^S = \sqrt{N}i(E_{i,j} - E_{i+N,j+N})_{1 \leq i,j \leq p} \in M_{2N}(\mathbb{C})^{p^2}$ . Pour tout mot  $w \in W_{p^2}$  de longueur inférieure à 2, les deux suites  $\text{tr}(w_G(A_N^G))$  et  $\text{tr}(w_G(A_N^S))$  admettent la même limite  $a_w$ , avec  $a_w = 0$ , si  $|w| = 1$ . Une application du théorème 4.3.1 montre que le vecteur  $(\text{Tr}((A_N^U)_{i,j} w_k(U_{l,t_l}, 1 \leq l \leq q))_{1 \leq i,j \leq p})_{1 \leq k \leq m}$  converge vers un vecteur gaussien centré que l'on note  $(\phi_{w_k}^U)_{1 \leq k \leq m}$  tandis que les trois vecteurs suivant,  $(\text{Tr}((A_N^G)_{i,j} w_k(G_{l,t_l}, 1 \leq l \leq q))_{1 \leq i,j \leq p})_{1 \leq k \leq m}$ , avec  $G \in \{O, S\}$  ainsi que  $(\text{Tr}((B_N^S)_{i,j} w_k(S_{l,t_l}, 1 \leq l \leq q))_{1 \leq i,j \leq p})_{1 \leq k \leq m}$ , convergent en loi vers  $\sqrt{2}(\text{Re}(\phi_{w_k}^U))_{1 \leq k \leq m}$ . En outre, pour tout  $i, j, l, m \in \{1, \dots, p\}$ ,  $\text{tr}(A_{N,i,j}^S B_{N,l,m}^S) = \text{tr}(J A_{N,i,j}^S J B_{N,l,m}^S) = 0$  et quand  $N \rightarrow \infty$ ,  $\text{tr}(A_N^S), \text{tr}(B_N^S) \rightarrow 0$ . On en déduit que le couple formé des deux familles de matrices aléatoires  $(\text{Tr}((A_N^G)_{i,j} w_k(G_{l,t_l}, 1 \leq l \leq q))_{1 \leq i,j \leq p})_{1 \leq k \leq m}$  et  $(\text{Tr}((B_N^G)_{i,j} w_k(G_{l,t_l}, 1 \leq l \leq q))_{1 \leq i,j \leq p})_{1 \leq k \leq m}$  converge vers un couple de champs gaussiens indépendants.  $\square$

# Bibliographie

- [1] Greg W. Anderson, Alice Guionnet, and Ofer Zeitouni. *An introduction to random matrices*, volume 118 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 2010.
- [2] Michael Anshelevich and Ambar N. Sengupta. Quantum free yang-mills on the plane. *Journal of Geometry and Physics*, 62(2) :330 – 343, 2012.
- [3] Thomas F. Banchoff and William F. Pohl. A generalization of the isoperimetric inequality. *J. Differential Geometry*, 6 :175–192, 1971/72.
- [4] Florent Benaych-Georges. Central limit theorems for the Brownian motion on large unitary groups. *Bull. Soc. Math. France*, 139(4) :593–610, 2011.
- [5] Philippe Biane. Free Brownian motion, free stochastic calculus and random matrices. In *Free probability theory (Waterloo, ON, 1995)*, volume 12 of *Fields Inst. Commun.*, pages 1–19. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1997.
- [6] Philippe Biane. Segal-Bargmann transform, functional calculus on matrix spaces and the theory of semi-circular and circular systems. *J. Funct. Anal.*, 144(1) :232–286, 1997.
- [7] Joan S. Birman. *Braids, Links and Mapping Class Group*. Annals of Mathematics Studies. Princeton University Press, 1975.
- [8] Daniel Bump. *Lie groups*. Graduate texts in mathematics. Springer, New York, 2004.
- [9] Emmanuel Cépa and Dominique Lépingle. Brownian particles with electrostatic repulsion on the circle : Dyson’s model for unitary random matrices revisited. *ESAIM, Probab. Stat.*, 5 :203–224, 2001.
- [10] Benoît Collins. Moments and cumulants of polynomial random variables on unitary groups, the Itzykson-Zuber integral, and free probability. *Int. Math. Res. Not.*, (17) :953–982, 2003.
- [11] Benoît Collins, James A. Mingo, Piotr Śniady, and Roland Speicher. Second order freeness and fluctuations of random matrices. III. Higher order freeness and free cumulants. *Doc. Math.*, 12 :1–70 (electronic), 2007.
- [12] Benoît Collins and Michael Stolz. Borel theorems for random matrices from the classical compact symmetric spaces. *Ann. Probab.*, 36(3) :876–895, 2008.
- [13] Benoît Collins and Sho Matsumoto. On some properties of orthogonal Weingarten functions. *Journal of Mathematical Physics*, 50(11) :113516, November 2009.
- [14] Benoît Collins and Piotr Śniady. Integration with Respect to the Haar Measure on Unitary, Orthogonal and Symplectic Group. *Communications in Mathematical Physics*, 264 :773–795, June 2006.

- [15] Anthony D'Aristotile, Persi Diaconis, and Charles M. Newman. Brownian motion and the classical groups. In *Probability, statistics and their applications : papers in honor of Rabi Bhattacharya*, volume 41 of *IMS Lecture Notes Monogr. Ser.*, pages 97–116. Inst. Math. Statist., Beachwood, OH, 2003.
- [16] Corrado de Concini and Claudio Procesi. A characteristic free approach to invariant theory. *Advances in Math.*, 21(3) :330–354, 1976.
- [17] Bart de Smit. The fundamental group of the hawaiian earring is not free. *International Journal of Algebra and Computation*, 2(12) :33–37, 1992.
- [18] Persi Diaconis and Steven N. Evans. Linear functionals of eigenvalues of random matrices. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 353(7) :2615–2633, 2001.
- [19] Persi Diaconis and Mehrdad Shahshahani. On the eigenvalues of random matrices. *Jour. Appl. Prob.*, 31(3) :49–62, 1994.
- [20] Bruce K. Driver.  $YM_2$  : Continuum expectations, lattice convergence, and lassos. *Commun. Math. Phys.*, 123(4) :575–616, 1989.
- [21] L. Erdős, B. Schlein, and H.-T. Yau. Semicircle law on short scales and delocalization of eigenvectors for Wigner random matrices. *ArXiv e-prints*, November 2007.
- [22] Franck Gabriel. Planar markovian holonomy fields : construction, characterization and application. *Article en cours*.
- [23] Roe W. Goodman and Nolan R. Wallach. *Symmetry, Representations, and Invariants*. Springer, 2009.
- [24] David J. Gross. Two-dimensional QCD as a string theory. *Nuclear Phys. B*, 400(1-3) :161–180, 1993.
- [25] David J. Gross and Andrei Matytsin. Some properties of large- $n$  two-dimensional yang-mills theory. *Nuclear Physics B*, 437(3) :541 – 584, 1995.
- [26] David J. Gross and Andrei Matytsin. Some properties of large- $N$  two-dimensional Yang-Mills theory. *Nuclear Phys. B*, 437(3) :541–584, 1995.
- [27] Tom Halverson and Arun Ram. Partition algebras. *European Journal of Combinatorics*, 26(6) :869 – 921, 2005. <ce :title>Combinatorics and Representation Theory</ce :title>.
- [28] Ben Hambly and Terry Lyons. Uniqueness for the signature of a path of bounded variation and the reduced path group. *Ann. of Math. (2)*, 171(1) :109–167, 2010.
- [29] Stephen P. Humphries. On weakly distinguished bases and free generating sets of free groups. *The Quarterly Journal of Mathematics*, 36(2) :215–219, 1985.
- [30] V. F. R. Jones. The Potts model and the symmetric group. In *Subfactors (Kyuzeso, 1993)*, pages 259–267. World Sci. Publ., River Edge, NJ, 1994.
- [31] Algimantas Adolfas Jucys. Symmetric polynomials and the center of the symmetric group ring. *Rep. Mathematical Phys.*, 5(1) :107–112, 1974.
- [32] V.A. Kazakov. Wilson loop average for an arbitrary contour in two-dimensional  $u(n)$  gauge theory. *Nuclear Physics B*, 179(2) :283 – 292, 1981.
- [33] V.A. Kazakov and I.K. Kostov. Computation of the wilson loop functional in two-dimensional  $u(\infty)$  lattice gauge theory. *Physics Letters B*, 105(6) :453 – 456, 1981.
- [34] Thierry Lévy. Schur-Weyl duality and the heat kernel measure on the unitary group. *Adv. Math.*, 218(2) :537–575, 2008.

- [35] Thierry Lévy. The master field on the plane. *ArXiv e-prints*, December 2011.
- [36] Thierry Lévy and Mylène Maïda. Central limit theorem for the heat kernel measure on the unitary group. *J. Funct. Anal.*, 259(12) :3163–3204, 2010.
- [37] Thierry Lévy. Wilson loops in the light of spin networks. *Journal of Geometry and Physics*, 52(4) :382–397, 2004.
- [38] Thierry Lévy. *Two-dimensional Markovian holonomy fields*. Astérisque 329, 2010.
- [39] Ian Grant Macdonald. *Lévy Processes in Lie Groups*. second edition.
- [40] Ian Grant Macdonald. *Symmetric functions and Hall polynomials*. Cambridge Tracts in Mathematics.
- [41] Yu.M. Makeenko and A.A. Migdal. Exact equation for the loop average in multicolor {QCD}. *Physics Letters B*, 88(1,2) :135 – 137, 1979.
- [42] P.-L. Méliot. The cut-off phenomenon for Brownian motions on symmetric spaces of compact type. *ArXiv e-prints*, October 2012.
- [43] John Milnor. Curvatures of left invariant metrics on lie groups. *Advances in Mathematics*, 21(3) :293 – 329, 1976.
- [44] James A. Mingo, Piotr Śniady, and Roland Speicher. Second order freeness and fluctuations of random matrices. II. Unitary random matrices. *Adv. Math.*, 209(1) :212–240, 2007.
- [45] James A. Mingo and Roland Speicher. Second order freeness and fluctuations of random matrices. I. Gaussian and Wishart matrices and cyclic Fock spaces. *J. Funct. Anal.*, 235(1) :226–270, 2006.
- [46] Alexandru Nica and Roland Speicher. *Lectures on the combinatorics of free probability*, volume 335 of *London Mathematical Society Lecture Note Series*. Cambridge University Press, Cambridge, 2006.
- [47] Andrei Okounkov and Anatoly Vershik. A new approach to representation theory of symmetric groups. *Selecta Math. (N.S.)*, 2(4) :581–605, 1996.
- [48] C. Emily I. Redelmeier. *Real Second-Order Freeness and Fluctuations of Random Matrices*. ProQuest LLC, Ann Arbor, MI, 2011. Thesis (Ph.D.)–Queen’s University (Canada).
- [49] L.C.G. Rogers and D. Williams. *Diffusions, Markov Processes and Martingales*. Cambridge Mathematical Library.
- [50] Ambar Sengupta. Gauge invariant functions of connections. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 121(3) :897–905, 1994.
- [51] Ambar Sengupta. Gauge theory on compact surfaces. *Mem. Amer. Math. Soc.*, 126(600) :viii+85, 1997.
- [52] Isadore Manuel Singer. In Simon Gindikin, James Lepowsky, and Robert L. Wilson, editors, *Functional analysis on the eve of the 21st century. Vol. I*, volume 131 of *Progress in Mathematics*, page 263. Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 1995. In honor of the eightieth birthday of I. M. Gel’fand, Papers from the conference held at Rutgers University, New Brunswick, New Jersey, October 24–27, 1993.
- [53] G. ’t Hooft. A planar diagram theory for strong interactions. *Nuclear Physics B*, 72 :461–473, April 1974.
- [54] Terence Tao and Van Vu. Random matrices : Universality of local eigenvalue statistics. *Acta Mathematica*, 206(1) :127–204, 2011.

- [55] Don Weingarten. Asymptotic behavior of group integrals in the limit of infinite rank. *J. Mathematical Phys.*, 19(5) :999–1001, 1978.
- [56] Feng Xu. A random matrix model from two-dimensional Yang-Mills theory. *Comm. Math. Phys.*, 190(2) :287–307, 1997.
- [57] Paul Zinn-Justin. Jucys-Murphy Elements and Weingarten Matrices. *Letters in Mathematical Physics*, 91 :119–127, February 2010.